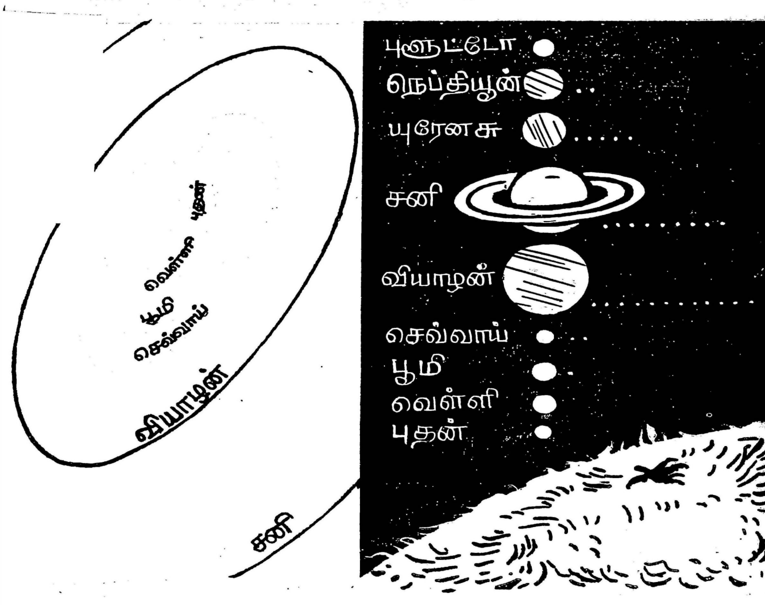


தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

த. பா. நி. (க. வெ.) வரிசை எண்—779

உயர்நிலை வான இயல்

(பட்டப் படிப்பிற்குரியது)

(திருத்தப்பட்ட பாடதிட்டத்தின்படி வெளியிடப்படுகின்றது)

ஆசிரியர்

க. சு. இராமச்சந்திரன், M.A., Dip. in Statistics
கணிதத் துணைப் பேராசிரியர்,
இரா. மி. விவேகானந்தர் கல்லூரி,
சென்னை.

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

First Edition—December, 1977
Number of Copies—2000

T.N.T.B.S. (C.P.) No. 779

ADVANCED ASTRONOMY

K. S. RAMACHANDRAN

Price Rs. 6.00

Published by the Tamilnadu Textbook Society under the Centrally Sponsored Scheme of Production of books and literature in regional languages at the University level, of the Government of India in the Ministry of Education and Social Welfare (Department of Culture), New Delhi.

This book has been printed on concessional paper made available by the Government of India

Printed by :
Tax and Company Law Press
Guindy,
Madras-600 032.

அணிந்துரை

(திரு. செ. அரங்கநாயகம், தமிழகக் கல்வி அமைச்சர்)

தமிழைக் கல்லூரிக் கல்வி மொழியாக ஆக்கிப் பதினேழாண்டு கள் ஆகிவிட்டன. குறிப்பிட்ட சில கல்லூரிகளில் இளங்கலை வகுப்பு வரை மாணவர்கள் தங்கள் பாடங்கள் அனைத்தையும் தமிழிலேயே கற்று வந்தனர். 1969ஆம் ஆண்டிலிருந்து அறிவியல் பாடங்களையும் தமிழிலேயே கற்பிக்க ஏற்பாடு செய்துள்ளோம். தமிழிலேயே கற்பிப்போம் என முன்வந்துள்ள கல்லூரி ஆசிரியர் களின் ஊக்கம், பிற பல துறைகளில் தொண்டு செய்வோர் இதற் கெனத் தந்த உழைப்பு, தங்கள் சிறப்புத் துறைகளில் நூல்கள் எழுதித் தர முன்வந்துள்ள நூலாசிரியர்கள் தொண்டுணர்ச்சி இவற்றின் காரணமாக இத் திட்டம் நம்மிடையே மகிழ்ச்சியும் மன நிறைவும் தரத்தக்க வகையில் நடைபெற்று வருகிறது. இவ்வகையில் கல்லூரிப் பேராசிரியர்கள் கலை, அறிவியல் பாடங்களை மாணவர் களுக்குத் தமிழிலேயே பயிற்றுவிப்பதற்குத் தேவையான பயிற்சியைப் பெறுவதற்கு மதுரைப் பல்கலைக்கழகமும் சென்னைப் பல்கலைக் கழகமும் ஆண்டுதோறும் எடுத்துவரும் பெருமுயற்சியைக் குறிப் பிட்டுச் சொல்லவேண்டும்.

வரலாற்றியல், அரசியல், உளவியல், பொருளியல், மெய்ப் பொருளியல், புவியியல், புவியமைப்பியல், மனையியல், கணிதவியல், இயற்பியல், வேதியியல், உயிரியல், வானியல், புள்ளியியல், விலங்கியல், தாவரவியல், பொறியியல், சட்டவியல் ஆகிய எல்லாத் துறைகளிலும் மூலநூல்கள், மொழிபெயர்ப்பு நூல்கள் என்று இரு வகையிலும் தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம் நூல்களை வெளியிட்டு வருகிறது.

இவற்றுள் ஒன்றான **உயர்நிலை வான இயல்** என்னும் இந் நூல் தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனத்தின் **779** ஆவது வெளியீடாகும். கல்லூரித் தமிழ்க் குழுவின் சார்பில் வெளியான **35** நூல்களையும் சேர்த்து இதுவரை **814** நூல்கள் வெளிவந்துள்ளன. இந்நூல் மைய அரசு, கல்வி, சமூக நல அமைச்சகத்தின் 'மாநில மொழியில் பல்கலைக்கழக நூல்கள் வெளியிடும் திட்ட'த்தின்கீழ் வெளியிடப் படுகிறது.

தமிழில் பயிலும் மாணவர்கள் உலக மாணவர்களிடையே சிறந்த இடம் பெறவேண்டும் என்பதே நம் குறிக்கோளாகும். கல்லூரிகளிலும் பல்கலைக்கழகங்களிலும் கலையியற் பாடங்களையும், அறிவியற் பாடங்களையும், தொழில்நுட்ப அறிவுப் பாடங்களையும் பயிலுகின்ற மாணவர்கள், அவற்றைத் தமிழில் பயில வேண்டும் என்பதை வலியுறுத்தி வருவதற்குக் காரணம், தமிழறிவு வளர வேண்டும் என்பதைவிட, தமிழ் மக்களின் அறிவு ஆற்றல் எளிதாக, விரைவாக வளரவேண்டும் என்பதுதான். 'எதிலும் தமிழ்; எங்கும் தமிழ்' என்னும் குறிக்கோளை நிறைவேற்ற வேண்டிய கடப்பாடு தமிழக ஆசிரியப் பெருமக்களையும் மாணவர்களையும் சார்ந்த தாகும். தமிழ்நாட்டுப் பல்கலைக்கழகங்களின் பல்வகை உதவி களுக்கும் ஒத்துழைப்புக்கும் நம் மனம்கலந்த நன்றி உரித்தாகுக!

செ. அரங்கநாயகம்

பொருளடக்கம்

1. அடிப்படைக் கருத்துகள்

(i) வான இயல்

வான இயல் என்பது, விண்பொருள்களைப்பற்றிய அறிவியல் ஆகும். தொடக்கத்தில் வான இயலின் பொருள், விண் பொருள்களைக் காண்பது, அவைகளை வகைப்படுத்துவது, அவற்றின் போக்குகளைக் கண்டறிவது என மட்டுமே கருதப்பட்டு வந்தது. கண்டறிந்த விண் பொருள்களின் வகைகளும் எண்ணிக்கைகளும் அதிகமாக அதிகமாக, வான இயலில் பல பிரிவுகள் ஏற்பட்டன. தற்போது வான இயலின் முக்கியப் பிரிவுகளாகக் கருதப்படும் சிலவற்றை அடியில் காண்க.

கோள வான இயல் (Spherical Astronomy) என்பது, கோளத்தின் மேலுள்ள புள்ளிகளின் பகுமுறை வரைகணிதம் ஆகும்.

செய்முறை வான இயல் (Practical Astronomy), விண் பொருள்களைக் காட்சிப்பதிவு செய்வது பற்றிய அறிவியல். காட்சிப் பதிவுகளுக்காகக் கருவிகளைச் செய்வது, இயக்குவது, காட்சிப் பதிவு களைச் சரிபார்ப்பது ஆகியவையும் இதில் அடங்கும். இதுவே தொலைநோக்கிக்கூட வானியல் (Observatory Astronomy), புவி மேற் பகுதி வானியல் (Geodetic Astronomy), வான ஊர்தி வானியல் (Aviation Astronomy), கடற்பகுதி (nautical) வானியல் போன்ற உட்பகுதிகளைக் கொண்டது.

வான இயற்பியல் (Astrophysics) என்பது, விண்பொருள்களின் இயற்பியல் வேதியியல்பற்றி ஆராய்வது. ரேடியோ வான இயல் (Radio Astronomy), விண்பொருள் தொடக்க இயல் (Cosmogony), என்றும் வெவ்வேறு பிரிவுகள் உள்ளன.

விண்வெளி இயக்கவியல் (Celestial Mechanics) என்பது, விண்பொருள்களின் இயக்கங்களுக்குக் கணித முறையில் விளக்கம் தருதல், அப்பொருள்களின் பாதைகளைக் கணக்கிடுதல், அவற்றின்

போக்குகளில் ஏற்படும் சிறு அசைவுகளைக் கணக்கிட்டு அவற்றின் காரணங்களை ஆராய்தல், விண்பொருள்களின் திணிவு, வடிவம் ஆகியவை பற்றி ஆராய்தல், கடல்நீர் ஏற்ற இறக்கம் (Tides) போன்ற நிகழ்ச்சிகளை ஆராய்ந்து அவற்றிற்குக் காரணம் கூற முற்படுதல், முதலியவைகளை அடக்கிய அறிவியல் ஆகும். சுருங்கக் கூறு மிடத்து, செய்முறை வானியலுக்கு உறுதுணையாகக் கணித அறிவைப் பயன்படுத்தும் துறையே விண்வெளி இயக்கவியல் ஆகும்.

விண்வெளி இயக்கவியலை உயர்நிலை வான இயல் (Advanced Astronomy) என்றும், இயக்கமுறை வான இயல் (Dynamical Astronomy) என்றும் குறிப்பிடுவது வழக்கம்.

விண்வெளி இயக்கவியலின் தந்தை ஐசக் நியூட்டன் (1642—1725) ஆவார். அவர்தம் சாசுவத ஈர்ப்புவிதியும், மூன்று இயக்க விதிகளுமே இத்துறையின் அடிப்படையாகும். நியூட்டனுக்குப் பின்னர் இத்துறையில் வியத்தகு ஆராய்ச்சிகள் செய்துள்ளவர்கள் பலர். அவர்களில் ஆய்லர் (Euler, 1707—1783), லாம்பர்ட் (Lambert, 1728—1777), லாகிராஞ்சு (Lagrange, 1736—1813), லாபிளாசு (Laplace, 1749—1827), ஆல்பர்சு (Olbers), கவுசு (17771 – 855), ஹான்சன், டிலானே (Delaunay), ஹில் (Hill), பிரவுன் (Brown), என்போர் குறிப்பிடத்தக்கவர். இத்துறையின் பல சூத்திரங்களும் வழிமுறைகளும் இவர்களது பெயரில் இன்னமும் வழங்கி வருகின்றன.

உயர்நிலை வானியலில் இரு பிரிவுகள் உண்டு. சூரியனைச் சுற்றி வரும் கிரகங்களை ஆராய்தல் (Planetary Theory) ஒரு பிரிவு. இப் பிரிவில் ஆராய்ச்சிகள் பொதுவில் கவுசு காலத்துடன் முடிந்து விட்டன என்றே கருதலாம். கவுசு ஒரு பெரிய கணித மேதை மட்டு மல்ல, செய்முறைக் கணிதத்திலும் கணக்கீடுகளிலும் கூட அவரை மிஞ்சியவர் எவருமிலர் எனலாம். உயர்நிலை வானியலில் மற்றொரு பிரிவு கிரகங்களின் துணைக் கோள்களின் இயக்கத்தை ஆராய்வது (Satellite Theory). அண்மைக் காலத்தில் செயற்கைத் துணைக் கோள்கள் பல மனிதனால் உண்டாக்கப்பட்டுள்ளன. இவைகளின் இயக்க ஆராய்ச்சியினால் இத்துறை மறுபடியும் முதலிடம் பெற்று வருகிறது.

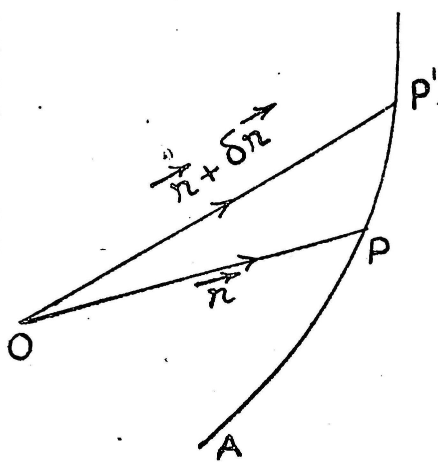
வான இயல் கணக்கீடுகள் மிக நீண்டவை. பல தசம இடங்கள் கொண்ட எண்களும், அவற்றில் பெருக்கல், வகுத்தல், வர்க்கமூலம், கனமூலம் காணுதல் போன்ற செயல்களும், பல நூற்றுக்கணக்கான முக்கிய உறுப்புகள் கொண்ட பல 'கந்தழித் தொடர்களும் வான இயலில் சர்வ சாதாரணமானவை. நேபியர் மடக்கைகளைக் கண்டு

பிடித்தது வான இயல் வல்லுனர்களுக்குப் பேருதவியாக இருந்தது. ஆயினும், சில கணக்கீடுகள் பல வருடங்கள் எடுத்துக் கொண்டன. இரண்டாம் உலகப் போருக்குப் பின் நடைமுறைக்கு வந்த மின் கணிப்பிகள் (Computers) தற்போது கணக்கீடுகள் செய்யும் நேரத்தை வெகுவாகக் குறைத்துள்ளன. மனித சக்திக்கு அப்பாற் பட்டதாகக் கருதப்பட்டு வந்த கணக்கீடுகளும் இப்போது மின் கணிப்பிகளின் உதவியால் செய்யப்பெற்று வருகின்றன.

(ii) இயக்கவியல்

1·1 திசைவேகம்

இயக்கவியலிலும், இயக்கவிசையியலிலும் துகள் என்ற கருத்து அடிப்படையானது. துகள் என்பது, கொடுத்துள்ள நேரத்தில் ஒரு குறிப்பிடத்தக்க இடத்திலுள்ள ஒரு பொருள். இதற்கு நிலைமம் (inertia) என்ற ஒரு பண்பு உண்டு. இந்தத் துகளுக்கும், மற்ற துகள் களுக்குமிடையேயுள்ள உறவுகளைத் தருவதன் மூலம் துகள் களைப்பற்றி வருணிக்க இயலும். ஒரு துகளின் நிலைமத்தை அளவீடு செய்ய அதற்குத் திணிவு (mass) ஒன்றைக் கற்பிக்கிறோம் (postulate). அதிகத் திணிவுபெற்ற துகள் கள், குறைந்த திணிவுபெற்ற துகள்களைப் போன்று எளிதில் நகருவதில்லை. ஆகவே, துகள் களின் நிலைபெறு தன்மையை நிலைமம் என்று குறிப்பிட்டு, அப்பண்பினை அளக்க, திணிவு என்னும் கருத்தைப் பயன் படுத்துகிறோம்.



படம் 1·1

O என்பது ஒரு நிலையான புள்ளி. P என்பது நகர்ந்துவரும் ஒரு துகளின் இருப்பிடம். இப்போது நேரம் t என்க. மிகச்சிறிய நேரம் δt கழித்து, அதாவது நேரம் $t+\delta t$ ஆக மாறும்போது, துகளின் இருப்பிடம் P' என்க. P, P' ஆகிய புள்ளிகளின் நிலைத் திசையிகள் முறையே $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}+\delta\mathbf{r}$ எனில், δt கால இடைவெளியில் துகளின் நிலைத்திசையியில் மாறுபாடு $\delta\mathbf{r}$. எனவே, நிலைத்திசையியின் சராசரி மாறுபாட்டு வீதம் $\frac{\delta \mathbf{r}}{\delta t}$. δt ஆனது பூச்சியத்தை நெருங்கு

கையில் $\frac{\delta \mathbf{r}}{\delta t}$ ன் எல்லை $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$. இதுவே துகளின் திசை வேகம் (velocity) எனப்படும். இதனை $\mathbf{v}$ என்று குறிப்பிடுவோம்.

O வழியாக Ox, Oy, Oz என்ற நிலையான அச்சுகளை எடுத்துக் கொள்க. $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ என்பன இந்த அச்சுகளின் திசையிலான அலகுத் திசையிகள். P-ன் அச்சுத்தூரங்கள் (x, y, z) எனில்

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

$$\text{எனவே } \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k}$$

இதனால் P என்னுமிடத்தில் துகளின் வேகத்தின் கூறுகள் x திசையில் $\frac{dx}{dt}$, y திசையில் $\frac{dy}{dt}$, z திசையில் $\frac{dz}{dt}$ ஆகும்.

C என்பது துகளின் பாதையைக் குறிக்கும் சமதள வளைவு (plane curve) என்க. A என்பது Cல் ஒரு நிலையான புள்ளி. வில் $AP = s$, வில் $AP' = s + \delta s$ எனில், $\frac{d\mathbf{r}}{ds}$ என்பது Pல் Cக்கு வரையப்பட்ட தொடுகோட்டின் திசையிலான அலகுத் திசையி என்று நாமறிவோம்.

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}$$

என்பதால், துகளின் வேகம் $\frac{ds}{dt}$, அதன் திசை மேற்கூறிய தொடுகோட்டின் திசை, என்று தெரிகிறது.

ஒரு துகளின் திசை வேகத்தை, வேறொரு முறையிலும் அறியலாம். இங்கு சௌகரியத்திற்காக, துகளானது ஒரு நிலையான தளத்தில் நகருகிறது என்று கொள்வோம். இத்தளத்தில் O என்பது நிலையான புள்ளி, OA என்பது நிலையான ஒரு கோடு. இதனை ஆதிக் கோடு என்போம். P எனும் புள்ளியின் கோணதூரக் கூறுகள் (r, θ), P'ன் கூறுகள் $(r + \delta r, \theta + \delta\theta)$ என்க. துகளின் வேகத்தினை OPன் திசையிலும் அதற்குச் செங்குத்தாயும் கூறுபடுத்தி அறிய முற்படுவோம்.

துகளின் ஆரை வேகம் (radial velocity)

$= OP$-ன் திசையில் துகளின் வேகம்

$$= \lim_{\delta t \to 0} \frac{OP' \cos \delta\theta - OP}{\delta t} =$$

$$= \underset{\delta t \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{(r+\delta r)\left\{1-\frac{\delta\theta^2}{\lfloor 2}+\frac{\delta\theta^4}{\lfloor 4}-\ldots\right\}-r}{\delta t}$$

$$= \underset{\delta t \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{\delta r - r\frac{(\delta\theta)^2}{\lfloor 2} - \delta r\frac{(\delta\theta)^2}{\lfloor 2} - \ldots\ldots}{\delta t}$$

$$= \frac{dr}{dt}.$$

துகளின் குறுக்கு வேகம் (Transverse velocity)

$= OP$க்குச் செங்குத்தான திசையில் துகளின் வேகம்

$$= \underset{\delta t \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{OP' \sin\delta\theta}{\delta t}$$

$$= \underset{\delta t \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{(r+\delta r)\left\{\delta\theta - \frac{(\delta\theta)^3}{\lfloor 3} + \ldots\ldots\right\}}{\delta t}$$

$$= \underset{\delta t \to 0}{\text{எல்லை}} \left\{ r\frac{\delta\theta}{\delta t} + \delta r\frac{\delta\theta}{\delta t} + \ldots\ldots \right\}$$

$$= r\frac{d\theta}{dt}$$

ஆகவே மொத்த வேகம் $= \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2}$

1·2 திசைவேக வளர்ச்சி வீதம் (Acceleration)

திசைவேகமானது நேரத்தைப் பொறுத்து அதிகரிக்கும் வீதத்தை அளவிலும் திசையிலும் குறிப்பது திசைவேக வளர்ச்சி வீதம் எனப்படும்.

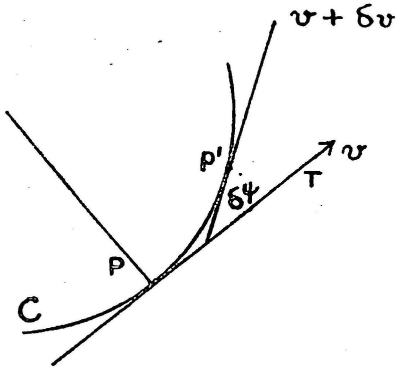
வெக்டர் குறியீட்டில், ஒரு துகளின் திசை வேகம் t நேரத்தில் $\mathbf{v}$ என்றால், அந்நேரத்தில் அதன் திசை வேக வளர்ச்சி வீதம் $\frac{d\mathbf{v}}{dt}$ ஆகும். இதனை $\mathbf{a}$ என்று குறிப்போம்.

கார்ட்டீசியன் அச்சுகளைக் கொள்க. t நேரத்தில் (x,y,z) என்ற புள்ளியில் இருக்கும் துகளின் திசைவேக வளர்ச்சி வீதம்

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\mathbf{k}$$

எனவே x, y, z அச்சுத் திசைகளில் திசைவேக வளர்ச்சி வீதத்தின் கூறுகள் முறையே $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$ ஆகும்.

C என்பது துகளின் பாதை என்க. P எனும் புள்ளியில் துகளின் வேகம் v, அதற்கு மிக அருகிலுள்ள P' எனும் புள்ளியில் அதன் வேகம் $v+\delta v$ என்க. இவ்வேகங்களின் திசைகள் முறையே P, P'ல் Cக்கு வரையப்படும் தொடு கோடுகளாகும். $\delta\Psi$ என்பது இத்தொடுகோடுகளுக்கிடையேயுள்ள கோண அளவு. Pயிலிருந்து துகள் P'க்குச் செல்ல ஆகும் காலம் δt எனில், Pல் வரையப்பட்ட தொடுகோடு, செங்கோடு ஆகிய திசைகளில் திசை வேக வளர்ச்சி வீதத்தின்கூறுகளைப் பெறுவோம்.



படம் 1·2

தொடு கோட்டின் திசையில் வேகவளர்ச்சி வீதம்

$$= \lim_{\delta t\to 0} \frac{(v+\delta v)\cos\delta\Psi - v}{\delta t}$$

$$= \lim_{\delta t\to 0} \frac{(v+\delta v)\left\{1-\frac{(\delta\Psi)^2}{\lfloor 2}+\ldots\ldots\right\}-v}{\delta t}$$

$$= \lim_{\delta t\to 0} \frac{\delta v-\frac{v(\delta\Psi)^2}{\lfloor 2}+\ldots\ldots}{\delta t}$$

$$= \frac{dv}{dt}$$

செங்கோட்டின் திசையில் வேகவளர்ச்சி வீதம்

$$= \lim_{\delta t\to 0} \frac{(v+\delta v)\sin\delta\Psi - 0}{\delta t}$$

$$= \lim_{\delta t\to 0} \frac{(v+\delta v)\left\{\delta\Psi-\frac{(\delta\Psi)^3}{\lfloor 3}+\ldots\right\}}{\delta t}$$

$$= \lim_{\delta t\to 0} \frac{v\delta\Psi+\delta v\,\delta\Psi-\ldots}{\delta t}$$

$$= v\frac{d\Psi}{dt}$$

தொடு கோட்டு வேக வளர்ச்சி வீதத்தை $v\dfrac{dv}{ds}$ என்றும் எழுதலாம்.

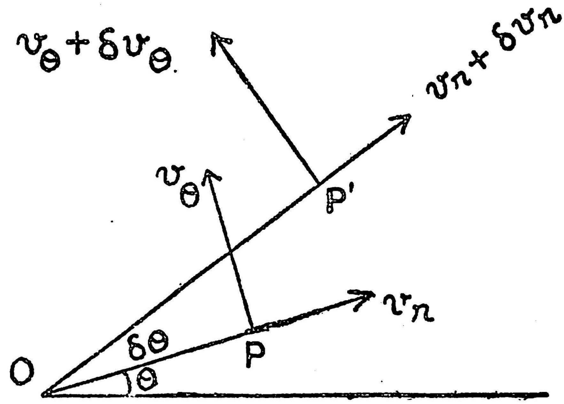
ஏனெனில்

$$\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{ds}\,\frac{ds}{dt}=\frac{dv}{ds}\,v$$

இவ்வாறே, செங்கோட்டு வேக வளர்ச்சி வீதம்

$$v\frac{d\Psi}{dt}=v\frac{d\Psi}{ds}\,\frac{ds}{dt}=v\cdot\frac{1}{\rho}\cdot v=\frac{v^2}{\rho}\,.$$

இங்கு ρ என்பது வளைவாரை.



படம் 1·3

திசை வேக வளர்ச்சி வீதத்தினை, கோணதூரக் கூறுகள் மூலமும் காணலாம். P, P' ல் முறையே v_r, $v_r+\delta v_r$ என்பன ஆரை வேகக் கூறுகள், v_θ, $v_\theta+\delta v_\theta$ என்பன குறுக்கு வேகக் கூறுகள் என்க.

$v_r=\dfrac{dr}{dt}$, $v_\theta=r\dfrac{d\theta}{dt}$ என்பதைக் கவனிக்க.

ஆரை வேக வளர்ச்சி வீதம்

$$=\underset{\delta t\to o}{\text{எல்லை}}\;\frac{(v_r+\delta v_r)\cos\delta\theta-(v_\theta+\delta v_\theta)\sin\delta\theta-v_r}{\delta t}$$

$$=\underset{\delta t\to o}{\text{எல்லை}}$$

$$\frac{\left(v_r+\delta v_r\right)\left(1-\dfrac{(\delta\theta)^2}{\lfloor 2}+\ldots\right)-\left(v_\theta+\delta v_\theta\right)\left(\delta\theta-\dfrac{(\delta\theta)^3}{\lfloor 3}+\ldots\right)-v_r}{\delta t}$$

$$=\underset{\delta t\to o}{\text{எல்லை}}\;\frac{\delta v_r+\ldots-v_\theta\,\delta\theta-\ldots}{\delta t}$$

$$= \frac{dv_r}{dt} - v_\theta \frac{d\theta}{dt}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\right) - r\frac{d\theta}{dt}\frac{d\theta}{dt}$$

$$= \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

குறுக்கு வேக வளர்ச்சி வீதம்

$$= \underset{\delta t \to o}{\text{எல்லை}} \frac{(v_r + \delta v_r)\sin\delta\theta + (v_\theta + \delta v_\theta)\cos\delta\theta - v_\theta}{\delta t}$$

$$= \underset{\delta t \to o}{\text{எல்லை}}$$

$$\frac{\left(v_r + \delta v_r\right)\left(\delta\theta - \frac{(\delta\theta)^3}{\lfloor 3} + \ldots\right) + \left(v_\theta + \delta v_\theta\right)\left(1 - \frac{(\delta\theta)^2}{\lfloor 2} + \ldots\right) - v_\theta}{\delta t}$$

$$= \underset{\delta t \to o}{\text{எல்லை}} \frac{v_r\,\delta\theta + \ldots + \delta v_\theta + \ldots\ldots}{\delta t}$$

$$= v_r \frac{d\theta}{dt} + \frac{dv_\theta}{dt}$$

$$= \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + \frac{d}{dt}\left(r\frac{d\theta}{dt}\right)$$

$$= \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r \cdot r\frac{d\theta}{dt}\right)$$

$$= \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)$$

சுழல் வேகம், சுழல் வேக வளர்ச்சி வீதம்

ஒரு துகள் தளத்தில் C எனும் வளைவில் நகருவதாகக் கொள்க. அதன் கோணதூரக் கூறுகள் (r, θ) எனில், நிலைப்புள்ளி Oஐப் பொறுத்து அதன் சுழல் வேகம் (angular velocity) $\frac{d\theta}{dt}$, சுழல் வேக வளர்ச்சி வீதம் $\frac{d^2\theta}{dt^2}$.

இயக்கவியலில் அடிக்கடி காலத்தைக் குறிக்கும் t எனும் மாறியைப் பொறுத்து வகைக்கெழுக்கள் எடுக்க வேண்டியிருக்கும். இதற்காக நியூட்டன் புகுத்திய சுருக்க முறையைக் கடைப்பிடிப்போம். இதன்படி $\frac{dx}{dt}$ ஐ $\dot{x}$ என்றும், $\frac{d^2x}{dt^2}$ ஐ $\ddot{x}$ என்றும் குறிப்போம்

1·3 விசை

P, Q என்பன இரு துகள்கள் என்க. Q வினுல் P க்கு ஏற்படும் திசை வேக வளர்ச்சி வீதத்தை $\mathbf{a}_{pq}$ என்றும், P யினுல் Q க்கு ஏற்படும் திசை வேக வளர்ச்சி வீதத்தை $\mathbf{a}_{qp}$ என்றும் குறித்தால், பரிசோதனைகள் மூலம் $-\dfrac{a_{pq}}{a_{qp}}$ ஆனது நிலையான விகிதம் என்பதை அறியலாம். இந்த நிலையான எண்ணை μ_{qp} என்று குறிக்க. P, Q ஆகியவற்றின் இடைத்தூரம் மாறுவதாலோ, அல்லது ஒளியின் வேகத்தைவிட மிகச் சிறியதாக இருக்கும் போது ஒன்றைப் பொறுத்து மற்றொன்றின் வேகம் மாறுவதாலோ எக்காலத்தும் எவ்விடத்தும் μ_{qp} ஒரு மாறிலியாக அமைகிறது. மேலும், P, Q, R என்பன மூன்று துகள்கள் எனில் $\mu_{rq} = \dfrac{\mu_{rp}}{\mu_{qp}}$ என்பதையும் அறியலாம்.

$\mu_{rq} = -\dfrac{a_{qr}}{a_{rq}}$ என்பதால் இதனின்று நாமறிவதாவது :

$$-a_{qr}\,\mu_{qp} = a_{rq}\,\mu_{rp}$$

இது, Q, R இடையே நிலவும் வேக வளர்ச்சி வீதங்களை ஒப்பிடுகிறது. ஆயினும், இதனில் μ_{qp}, μ_{rp} என்ற எண்கள் மூலம் P ன் இருக்கை உணர்த்தப்படுவதைக் கவனிக்க. μ_{qp} ஐ நாம் 'P ஐப் பொறுத்து Q ன் திணிவு'' எனலாம். P யினைத் திட்ட (standard) மாகக்கொண்டு, μ_{qp} ஐச் சுருக்கமாக Q-ன் திணிவு என்றே கூறலாம்.

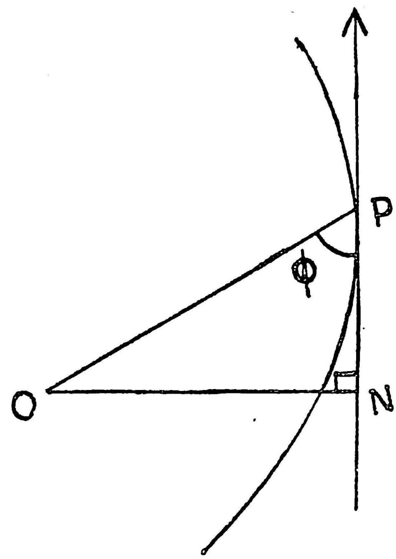
m என்பது ஒரு துகளின் திணிவு, $\mathbf{a}$ அதன் திசைவேக வளர்ச்சி வீதம் எனில், $m\mathbf{a}$ ஐ அத்துகளின் மீதான விசை (Force) என்கிரும். ஒரே துகளின் மீது பல விசைகள் தாக்குமாயின், அவை ஒவ்வொன்றும் மற்றவைகளைப் பொறுத்து மாருமல் (independently) தாக்குகின்றன. துகளின் இருப்பிடம், அதன் வேகம், நேரம் ஆகியவற்றைச் சார்ந்து விசையானது அமைகிறது.

1·4 உந்தமும் இயக்கச் சக்தியும்

ஒரு துகளின் திணிவு m, அதன் திசைவேகம் $\mathbf{v}$ எனில், $m\mathbf{v}$ ஐ அத்துகளின் நேர்கோட்டு உந்தம் (linear momentum) என்போம். இதனை $\mathbf{p}$ என்று குறிப்பிடுவோம்.

துகளானது P எனும் புள்ளியில் இருக்கும்போது அதன் உந்தம் $\mathbf{p}$ என்க. $\overrightarrow{OP}=\mathbf{r}$ எனில், $\mathbf{r}\times\mathbf{p}$ ஐ உந்தத்திருப்பம் (moment of momentum) என்போம். உந்தத்திருப்பத்தினைச் சுழல் உந்தம் (angular momentum) என்றும் குறிப்பிடுவது வழக்கம். ஒரு துகளின் உந்தத் திருப்பமானது, அதன் திசைவேகம், O விலிருந்து அதன்

நிலைத்திசையி ஆகிய இரண்டையும் பொறுத்தது. ஆகவே $\mathbf{r}\times\mathbf{p}$ ஆனது, துகளின் 'O ஐச் சுற்றிய சுழல் உந்தம்' என்று குறிப்பிடப்படும்.



படம் 1·4

$$\text{சுழல் உந்தம்} = \mathbf{r}\times\mathbf{p}$$
$$= \mathbf{r}\times m\mathbf{v}$$
$$= \mathbf{r}\times m\frac{d\mathbf{r}}{dt}$$
$$= m\mathbf{r}\times\frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

என்பதைக் கவனிக்க.

$$\text{சுழல் உந்த அளவு} = |\mathbf{r}\times\mathbf{p}| = OP.\, mv.\, \sin\phi = mv.\, ON$$

மேலும், P-ன் வேகக் கூறுகள் $\frac{dr}{dt}, r\frac{d\theta}{dt}$ எனக் கொள்ள முடியுமாதலால் சுழல் உந்த அளவு

$$= m\frac{dr}{dt}\times O + mr\frac{d\theta}{dt}.\, r$$
$$= mr^2\frac{d\theta}{dt}$$

δt நேரத்தில் OP ஆனது OPP' எனும் கோணப்பகுதியை (sector) ஆக்குகிறது அல்லவா? இதன் பரப்பளவு

$$=\frac{1}{2} r (r+\delta r) \sin \delta\theta$$

எனவே பரப்பளவு வளர்ச்சி வீதம் $= \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt}$.

எனவே O ஐப் பொறுத்து சுழல் உந்த அளவு

$$= 2 \times (\text{திணிவு}) (\text{பரப்பளவு வேகம்}).$$

ஒரு துகளின் இயக்கச்சக்தி என்பது $\frac{1}{2} m v^2$ ஆகும். இங்கு m என்பது துகளின் திணிவு, v அதன் வேகம்.

1·5 பல துகள்கள்

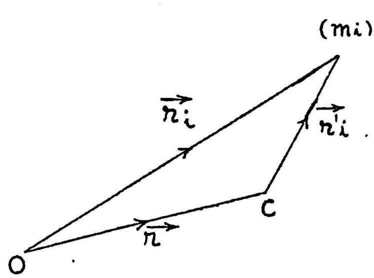
$m_1, m_2, \ldots, m_n$ என்ற திணிவுகளையுடைய n துகள்கள் நகர்ந்து கொண்டிருக்கட்டும். O எனும் நிலையான புள்ளியைப் பொறுத்து அவற்றின் நிலைத்திசையிகள் முறையே $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_n$ என்க. அவற்றின் மொத்தத் திணிவு m எனில்,

$$m = m_1 + m_2 + \ldots + m_n = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

C என்பது இவற்றின் திணிவு மையம் (Centre of mass),

C ன் நிலைத்திசையி $\mathbf{r}$ எனில்,

$$\mathbf{r} = \frac{\Sigma m_i \mathbf{r}_i}{\Sigma m_i} = \frac{\Sigma m_i \mathbf{r}_i}{m}$$



படம் 1·5

C ஐப் பொறுத்து இத்துகள்களின் நிலைத்திசையிகள் $\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2, \ldots, \mathbf{r}'_n$ எனில், $\Sigma m_i \mathbf{r}'_i = O$ என்பதைக் காண்க. மேலும் $\mathbf{r}_i = \mathbf{r} + \mathbf{r}'_i$. இதனை வகைப்படுத்த,

$$\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}'_i}{dt}, \quad \frac{d^2\mathbf{r}_i}{dt^2} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + \frac{d^2\mathbf{r}'_i}{dt^2}$$

எனவே $\Sigma m_i \dfrac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \Sigma m_i \dfrac{d\mathbf{r}}{dt} + \Sigma m_i \dfrac{d\mathbf{r}'_i}{dt}$

$$= m\frac{d\mathbf{r}}{dt} + \Sigma m_i \frac{d\mathbf{r}'_i}{dt}$$

மேலும் $\Sigma m_i \dfrac{d^2\mathbf{r}_i}{dt^2} = \Sigma m_i \dfrac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + \Sigma m_i \dfrac{d^2\mathbf{r}'_i}{dt^2}$

$$= m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + \Sigma m_i \frac{d^2\mathbf{r}'_i}{dt^2}$$

அடுத்தபடியாக, O ஐப் பொறுத்து துகள்களின் மொத்த சுழல் உந்தம்

$$= \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt}$$

$$= \Sigma (\mathbf{r}+\mathbf{r}'_i)\, m_i \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}'_i}{dt}\right)$$

$$= \Sigma\mathbf{r}\times m_i\frac{d\mathbf{r}}{dt} + \Sigma\,\mathbf{r}\times m_i\frac{d\mathbf{r}'_i}{dt} + \Sigma\,\mathbf{r}'_i\times m_i\frac{d\mathbf{r}}{dt} + \Sigma\mathbf{r}'_i\times m_i\frac{d\mathbf{r}'_i}{dt}$$

$$= (\Sigma m_i)\,\mathbf{r}\times\frac{d\mathbf{r}}{dt} + \mathbf{r}\times\frac{d}{dt}(\Sigma m_i\mathbf{r}'_i) + (\Sigma m_i\mathbf{r}'_i)\times\frac{d\mathbf{r}}{dt} + \Sigma\,\mathbf{r}'_i\times m_i\frac{d\mathbf{r}'_i}{dt}$$

$$= m\,\mathbf{r}\times\frac{d\mathbf{r}}{dt} + 0 + 0 + \Sigma\,\mathbf{r}'_i\times m_i\frac{d\mathbf{r}'_i}{dt}$$

இங்கு $\Sigma\,\mathbf{r}'_i \times m_i \dfrac{d\mathbf{r}'_i}{dt}$ என்பது துகள்களுக்கு C ஐப் பொறுத்த மொத்தச் சுழல் உந்தம் ஆகும். துகள்களின் மொத்தத் திணிவுக்குச் சமமான ஒரு துகளை அவற்றின் திணிவு மையத்தில் வைத்துள்ள தாகக் கருதினல், O ஐப் பொறுத்து இதன் சுழல் உந்தம் $m\mathbf{r} \times \dfrac{d\mathbf{r}}{dt}$. எனவே கொடுத்துள்ள துகள்களுக்கு, நிலையான O எனும் புள்ளியினைப் பொறுத்து மொத்தச் சுழல் உந்தத்தைப் பெற, அவற்றின் திணிவு மையத்தைப் பொறுத்த மொத்தச் சுழல் உந்தத்துடன், அவற்றின் மொத்தத் திணிவுக்குச் சமமான திணிவுள்ள துகள் ஒன்றினை அவற்றின் திணிவு மையத்தில் வைத்துள்ளதாகக் கருதக் கிடைக்கும் சுழல் உந்தத்துடன் கூட்ட வேண்டும்.

n துகள்களின் மொத்த இயக்கச் சக்தியினை இப்போது கணிப்போம். இது T என்று குறிப்பிடப்படும்.

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\frac{d\mathbf{r}_i}{dt}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2} \Sigma m_i \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}'_i}{dt}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2} \Sigma m_i \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2 + \Sigma m_i \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{r}'_i}{dt} + \frac{1}{2} \Sigma m_i \left(\frac{d\mathbf{r}'_i}{dt}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2} m \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2} \Sigma m_i \left(\frac{d\mathbf{r}'_i}{dt}\right)^2$$

(ஏனெனில் $\Sigma m_i \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{r}'_i}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \frac{d}{dt}(\Sigma m_i \mathbf{r}'_i) = 0$)

கொடுத்துள்ள துகள்களின் மொத்தத் திணிவுக்குச் சமமான திணிவுள்ள ஒரு துகளை, அவற்றின் திணிவு மையத்தில் வைத்துள்ளதாகக் கருதினுல், அதன் இயக்கச் சக்தி $m\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2$. திணிவு மையத்தைச் சார்ந்த இயக்கத்தினுல் கிடைக்கும் இயக்கச் சக்தி $\Sigma m_i \left(\frac{d\mathbf{r}'_i}{dt}\right)^2$.

எனவே துகள்களின் மொத்த இயக்கச் சக்தி

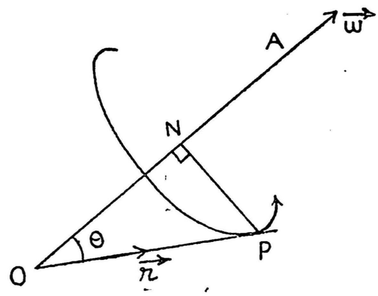
= அவற்றின் திணிவுமையத்திலுள்ள மொத்தத்திணிவின் இயக்கச்சக்தி + திணிவு மையத்தைப் பொறுத்து கிடைக்கும் இயக்கச் சக்தி.

1·6 சுழல் வேகமும் திசை வேகமும்

P எனும் புள்ளியிலுள்ள துகள், t நேரத்தில் OA எனும் அச்சினைச் சுற்றிச் சுழலுவதாகக் கொள்வோம். அதன் சுழல் வேகத்தை $\mathbf{w}$ எனும் திசையியினுல் குறிப்பிடலாம். $\mathbf{w}$-ன் அளவை w என்றும், திசையை $\overrightarrow{OA}$-ன் திசையாகவும் கொள்க. அதாவது, Aல் இருந்து பார்க்கும்போது OA ஐச் சுற்றிய சுழற்சி இடஞ்சுழியாக (anticlockwise) இருக்கவேண்டும். $\overrightarrow{OA} = \mathbf{r}$, P-ன் திசை வேகம் $\mathbf{v}$ என்க. PN என்பது OA-க்குச் செங்குத்தாக வரையப்பட்ட கோடு.

$\angle NOP = \theta$ என்க. P ஆனது N ஐ மையமாகவும் NP ஐ ஆரமாகவும் கொண்ட வட்டத்தில் w அளவு சுழல் வேகத்துடன் நகர்

கிறது. ஆகவே இதனுடைய வேகம் $NP.\ w$. இவ் வேகத்தின் திசை, இவ்வட்டத்திற்கு P-ல் வரையப்பட்ட தொடுகோடு.



படம் 1·6

$$NP.\ w = OP \sin\theta .\ w = |\ \mathbf{w} \times \mathbf{r}\ |$$

என்பதாலும், $\mathbf{v}$-ன் திசை $\mathbf{w}\times\mathbf{r}$ன் திசையுடன் பொருந்துவதாலும் $\mathbf{v} = \mathbf{w}\times\mathbf{r}$ என்றறிகிறோம்.

1·7 நிலைமச் சுழல் திறன்

கட்டிறுக்கப் பொருள் (rigid bodies)களின் இயக்கத்தை ஆராய்கையில் நிலைமச் சுழல்திறன் (moment of inertia), நிலைமப் பெருக்கம் (product of inertia) என்னும் அளவைகள் தேவைப் படுகின்றன.

ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருள் OA எனும் நிலையான அச்சைச் சுற்றி w எனும் சுழல் வேகம் கொண்டுள்ளது என்க. இப்பொருளை மிகச் சிறிய பாகங்களாகப் பகுத்து நோக்குகையில், ஒவ்வொரு பாகத்தையும் ஒரு துகளாகக் கருதலாம். அதாவது, பல துகள்கள் ஒன்றுக்கொன்று மிக நெருங்கியமைந்து ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளை ஆக்குவதாகக் கொள்ளலாம். m_i என்ற திணிவுள்ள இத்தகைய துகள் ஒன்று P_iயில் இருப்பதாகக் கொள்க. $\overrightarrow{OP_i} = \mathbf{r}_i$ எனில், அதன் திசை வேகம் $\mathbf{v}_i = \mathbf{w}\times\mathbf{r}_i$. எனவே அதன் சுழல் உந்தம் $m_i r_i \times v_i = m_i\ \mathbf{r}_i \times (\mathbf{w}\times\mathbf{r}_i)$. எனவே கட்டிறுக்கப் பொருளின் மொத்தச் சுழல் உந்தம் L

$$= \Sigma\, m_i\ \mathbf{r}_i \times (\mathbf{w}\times\mathbf{r}_i)$$

$$= \Sigma\, m_i\ (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i \mathbf{w} - \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{w}\ \mathbf{r}_i)$$

$$= (\Sigma\, m_i\ \mathbf{r}_i^2)\ \mathbf{w} - \Sigma m_i\ \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{w}\ \mathbf{r}_i$$

இப்போது Ox, Oy, Oz என்ற நிலையான அச்சுகளைக் கொள்க.

$$\mathbf{r}_i = x_i\,\mathbf{i} + y_i\,\mathbf{j} + z_i\,\mathbf{k}$$
$$\mathbf{w} = w_1\,\mathbf{i} + w_2\,\mathbf{j} + w_3\,\mathbf{k}$$
$$\mathbf{L} = L_1\,\mathbf{i} + L_2\,\mathbf{j} + L_3\,\mathbf{k}$$

எனில்,

$$L_1 = \Sigma m_i\,(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)\,w_1 - \Sigma m_i\,(x_i w_1 + y_i w_2 + z_i w_3)\,x_i$$
$$= \Sigma m_i\,(y_i^2 + z_i^2)\,w_1 - \Sigma m_i\,x_i\,y_i\,w_2 - \Sigma m_i\,x_i\,z_i\,w_3.$$

இவ்வாறே $L_2 = \Sigma m_i\,(z_i^2 + x_i^2)\,w_2 - \Sigma m_i y_i\,z_i\,w_3 - \Sigma m_i\,x_i\,y_i\,w_1$

$$L_3 = \Sigma m_i\,(x_i^2 + y_i^2)\,w_3 - \Sigma m_i\,z_i\,x_i\,w_3 - \Sigma m_i y_i\,z_i\,w_2$$

இப்போது $A = \Sigma m_i\,(y_i^2 + z_i^2)$, $B = \Sigma m_i\,(z_i^2 + x_i^2)$,

$C = \Sigma m_i(x_i^2 + y_i^2)$, $D = \Sigma m_i y_i z_i$, $E = \Sigma m_i z_i x_i$, $F = \Sigma m_i x_i y_i$

எனில்,

$$L_1 = Aw_1 - Fw_2 - Ew_3$$
$$L_2 = -Fw_1 + Bw_2 - Dw_3$$
$$L_3 = -Ew_1 - Dw_2 + Cw_3$$

A, B, C என்பன நிலைமச் சுழல்திறன்கள் எனப்படும். A என்பது, பொருளுக்கு x அச்சைப் பொறுத்த நிலைமச் சுழல்திறன். P_iயிலிருந்து x அச்சுக்குள்ள தூரம் d_i எனில், $d_i^2 = y_i^2 + z_i^2$ என்பதால், $A = \Sigma m_i d_i^2$ என்பதை அறிக. பொதுவில், ஒரு கட்டிறுக்குப் பொருளுக்கு l எனும் நிலையான கோட்டைப் பொறுத்த நிலைமச் சுழல்திறன் $\Sigma m_i d_i^2$. இங்கு d_i என்பது அப்பொருளின் எந்த ஒரு துகளுக்கும், l க்கு மிடையேயுள்ள தூரம்; m_i என்பது அத்துகளின் திணிவு. துகள்களின் இயக்கத்தில் திணிவு எவ்வாறு பயன்படுகிறதோ அவ்வாறே கட்டிறுக்கப் பொருள்களின் இயக்கத்தில் நிலைமச் சுழல் திறன் பயன்படுகிறது.

D, E, F என்பன நிலைமப் பெருக்கங்கள் எனப்படும். D ஆனது, அச்சு — z அச்சு ஆகியவற்றைப் பொறுத்த நிலைமப் பெருக்கம்.

கொடுத்துள்ள பொருளுக்கு, கொடுத்துள்ள அச்சுகளைப் பொறுத்துத்தான் நிலைமச் சுழல் திறன்களையும், நிலைமப் பெருக்கங் களையும் காணமுடியும். அச்சுகளை மாற்றினுல் இவற்றின் மதிப்பு களும் மாறுபடலாம். அச்சுக்களின் சில நிலைகளில், நிலைமப் பெருக் கங்களில் சில பூச்சியமாகலாம். எடுத்துக்காட்டாக, xOy தளத்தைப் பொறுத்து பொருள் சமச்சீர் பெற்றிருப்பின், $E = 0, F = 0.$

Ox, Oy, Oz என்ற அச்சுகளைப் பொறுத்து நிலைமப் பெருக்கங்கள் அனைத்தும் பூச்சியமானுல், இந்த அச்சுகள் O-ல் முக்கிய நிலைம

அச்சுகள் (Principal axes of inertia at 0) எனப்படும், இந்நிலையில் A, B, C என்பன முக்கிய நிலைமச் சுழல்திறன்கள் (Principal moments of inertia) எனப்படும். கொடுத்துள்ள பொருளுக்கு ஒவ்வொரு புள்ளி வழியாகவும் மூன்று முக்கிய நிலைம அச்சுகள் உள்ளன.

ஒரு பொருளானது x-அச்சைப் பொறுத்து ஒரு சுழற் பரப்பாக (solid of revolution) அமைந்திருக்குமாயின், அதற்கு Bயும் Cயும் சமமாக இருக்கும். எடுத்துக் காட்டாக, சிற்றச்சுக் கோள உரு (oblate spheroid) ஒன்றனுக்கு, சிற்றச்சு z-அச்சாகில், $A=B$. கோளத்திற்கு $A=B=C$.

பொருள்களின் இயக்கத்தில் நிலைமச் சுழல்திறன்கள், நிலைமப் பெருக்கங்கள் ஆகியவற்றின் அவசியத்தை வலியுறுத்துவதுபோல் அமைந்துள்ளது இயக்கச்சக்திக்கான கோவை. நிலையான அச்சைச் சுற்றிச் சுழன்று கொண்டிருக்கும் ஒரு பொருளின் இயக்கச் சக்தி T

$$
\begin{aligned}
&= \tfrac{1}{2}\,\Sigma\, m_i\,(\mathbf{w}\times\mathbf{r}_i)^2\\
&= \tfrac{1}{2}\,\Sigma\, m_i\,\{(w_2 z_i - w_3 y_i)^2 + (w_3 x_i - w_1 z_i)^2 + (w_1 y_i - w_2 x_i)^2\}\\
&= \tfrac{1}{2}\,\{\,\Sigma\, m_i\,(y_i^2+z_i^2)\,w_1^2 + \Sigma\, m_i\,(z_i^2+x_i^2)\,w_2^2\\
&\qquad + \Sigma\, m_i\,(x_i^2+y_i^2)\,w_3^2 - 2\,\Sigma\, m_i\, y_i\, z_i\, w_2\, w_3\\
&\qquad - 2\,\Sigma\, m_i\, z_i\, x_i\, w_3\, w_1 - 2\,\Sigma\, m_i\, x_i\, y_i\, w_1\, w_2\,\}\\
&= \tfrac{1}{2}\,\{\,A w_1^2 + B w_2^2 + C w_3^2 - 2\,D\, w_2\, w_3 - 2\,E\, w_3\, w_1 - 2\,F\, w_1\, w_2\,\}
\end{aligned}
$$

ஆதிப்புள்ளிவழியே செல்லும் ஒரு கோட்டின் திசைக் கொசைன்கள் l, m, n என்க. (x_i, y_i, z_i) எனும் புள்ளியில் வைக்கப் பட்டுள்ள m_i என்ற திணிவிற்கு இக் கோட்டைச் சுற்றிய நிலைமச் சுழல் திறன் $= \Sigma\, m_i\, d_i^2 = \Sigma\, m_i\,(OP^2 - PN^2)$

$$
\begin{aligned}
&= \Sigma\, m_i\,\{\,x^2+y^2+z^2-(lx+my+nz)^2\,\}\\
&= \Sigma\, m_i\,\{\,(x^2+y^2+z^2)\,(l^2+m^2+n^2)-(lx+my+nz)^2\,\}\\
&= \Sigma\, m_i\,\{\,l^2\,(y^2+z^2)\,+m^2\,(z^2+x^2)\,+n^2\,(x^2+y^2)\\
&\qquad -2\,m\,n\,y\,z - 2\,n\,l\,z\,x - 2\,l\,m\,x\,y\,\}\\
&= A\,l^2 + B\,m^2 + C\,n^2 - 2\,D\,m\,n - 2\,E\,n\,l - 2\,F\,l\,m
\end{aligned}
$$

1·8 விசைத் தேக்கம், வேலை

ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் அலகுத் துகள்மீது தாக்கும் விசை யொன்றினை, விசைத் தேக்கச்சார்பு (Potential function) மூலம் எளிதில் வருணிக்கலாம். $V(x,y,z)$ என்பது விசைத் தேக்கச்சார்பு

எனில், (x,y,z) என்ற புள்ளியில் விசையின் x,y,z கூறுகள் முறையே $-\dfrac{\partial V}{\partial x}, -\dfrac{\partial V}{\partial y}, -\dfrac{\partial V}{\partial z}$ ஆகும். இவ்விசைவெளி (field of force) யில் ஒரு அலகுத்துகள் (x,y,z) லிருந்து, அருகிலுள்ள $(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z)$ க்கு எடுத்துச் செல்லப்பட்டால், விசைவெளி செய்யும் வேலை $-\dfrac{\partial V}{\partial x}dx -\dfrac{\partial V}{\partial y}dy - \dfrac{\partial V}{\partial z}dz$ ஆகும். இதனை $-dV$ என்று அறிவோம்.

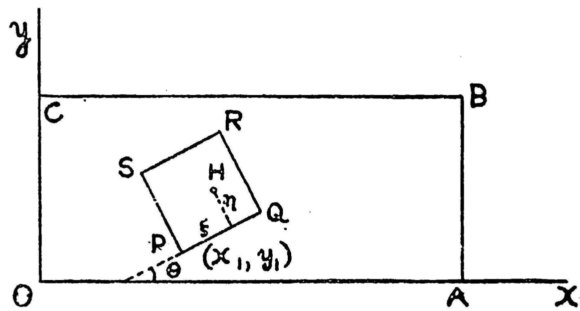
1·9 தாக்கு விசை

மிகப் பெரிய அளவு கொண்ட விசை யொன்று மிக மிகச்சிறிய காலம் தாக்கினால் அவ்விசையைத் தாக்கு விசை (impulsive force) என்போம். தாக்கு விசையின் அளவையும், அது தாக்கும் காலத்தின் அளவையும் பெருக்கினால் தாக்களவை (impulse) கிடைக்கும்.

தாக்கு விசை தாக்கும் காலம் மிகச் சிறியதாகையால், அதன் விளைவாகப் பொருள்கள் நகர்வதில்லை—நகர்வதற்குப் போதிய அவகாசம் இல்லை. ஆயினும் தாக்கு விசையின் விளைவாகப் பொருள்களின் உந்தத்தில் நன்கறியக்கூடிய (finite) மாற்றம் ஏற்படுகிறது. ஆகவே ஒரு தாக்களவையை, அது விளைவிக்கும் உந்த மாற்றத்தைக் கொண்டே அளக்கிறோம். இவ்வாறே, ஒரு தாக்களவையின் திருப்புத்திறன், உந்தத் திருப்புத்திறனில் அது விளைவிக்கும் மாறுதலுக்குச் சமமாகக் கொள்ளப்படுகிறது.

1·10 பொதுப்படுத்தப்பட்ட கூறுகள்

பல துகள்கள் ஒன்றோடொன்று பிணைக்கப்பட்டிருக்கும் போதும், பல கட்டிறுக்கப் பொருள்கள் ஒன்றின்மீதொன்றாக நகரும்



படம் 1·7

போதும், இம்மாதிரி பல நிலைகளில் அவற்றின் இருப்பிடத்தைக் குறிக்கப் பல அளவுகள் தேவைப்படும். எடுத்துக்காட்டாக, சதுர

வடிவமான தட்டொன்று மேசை மீது வைக்கப்பட்டிருக்கிறது என்க. அதன் இடத்தை அறுதியாகக் கூறுவதற்கு, அதன் ஒரு முனையின் கார்ட்டீசியன் கூறுகளையும், மேலும் அதன் ஒரு குறிப்பிட்ட பக்கம், மேசையின் ஒரு குறிப்பிட்ட பக்கத்துடன் சாய்ந்துள்ள கோணத்தையும் கொடுத்திருந்தால் போதும். படத்தில் $PQRS$ என்பது ஒரு சதுரம். மேசைவிளிம்புகளான OA, OC ஐ அச்சுகளாகக் கொண்டால், P-ன் கூறுகள் (x_1, y_1) என்க. x_1, y_1 என்பன P-ன் இடத்தைக் குறிப்பிடப் போதுமானவை. PQ க்கும் OA க்குமிடையேயுள்ள கோணம் θ எனில், θ-ன் உதவியினால் $PQRS$ ன் போக்கு (orientation) அறியப் படுகிறது. x_1, y_1, θ என்ற மூன்று அளவுகளும் இச்சதுரத்தின் கூறுகள் எனப்படும். இவற்றில் இரண்டின் அளவுகளை நிலையானவையாக வைத்துக் கொண்டு, மூன்றாவதை மட்டும் மாறுபாடு அடையச் செய்ய முடியும்—அதாவது சதுரத்திற்கு ஒரு அசைவு ஏற்படுத்த முடியும். மேலும் இவை சதுரத்தின் இடத்தை அறுதியாக வரையறுக்கின்றன.

ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின் இருப்பிடத்தை வெளி (Space) யில் குறிக்க, ஆறு கூறுகள் தேவைப்படும். எடுத்துக்காட்டாக, இவற்றை, அப்பொருளின் புவி ஈர்ப்பு மையத்தின் கார்ட்டீசியன் கூறுகள் x, y, z ; அதன் ஒரு நிலையான கோட்டிற்கு அவ்வச்சுகளைப் பொறுத்து திசைக் கொசைன்கள் l, m, n என்று கொள்ளலாம். ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட பொருள்களின் இருப்பிடத்தை அறிய ஆறுக்கு மேற்பட்ட கூறுகள் தேவைப்படலாம்.

ஒரு பொருளுக்கே, கூறுகளைப் பல விதங்களில் எடுத்துக்கொள்ளலாம். முதல் எடுத்துக்காட்டில், P, Q என்ற சதுர முனைகளின் கார்ட்டீசியன் கூறுகள் (x_1, y_1), (x_2, y_2) என்க. இந் நான்கு எண்களும் ஒன்றுக் கொன்று சாராதவையல்ல. சிறப்பாக, சதுரத்தின் பக்கம் c எனில்,

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = c^2.$$

இதன் மூலம் x_1, x_2, y_1 தரப்பட்டிருந்தால், y_2 ஐக் கணக்கிட்டு விடலாம். எனவே x_1, x_2, y_1 என்பனவற்றை சதுரத்தின் கூறுகளாகக் கொள்ளலாம். இவையும் ஒன்றுக் கொன்று சாராதவாறு மாறக் கூடியவை ; இவற்றைக் கொண்டு சதுரத்தின் இருப்பிடத்தை அறுதியாகக் கூறிவிட முடியும்.

பொதுவில், கூறுகள்

(i) கொடுத்துள்ள பொருள்களின் இருப்பிடத்தைத் திட்டவட்டமாகக் குறிப்பிட உதவ வேண்டும்.

(ii) ஒன்றுக் கொன்று சாராது மாறுபட இயல வேண்டும். அவ்விதம் மாறும் போது, பொருள்களினிடையேயுள்ள கட்டுப் பாடுகள் (constraints) மீறப்படக் கூடாது.

இத்தகைய கூறுகள், **பொதுப்படுத்தப்பட்ட கூறுகள்** (generalised co-ordinates) எனப்படும். ஒரு குறிப்பிட்ட பொருளுக்கு (அல்லது பொருள்களின் தொகுப்புக்கு) தேவையான கூறுகளின் எண்ணிக்கை, அதன் **தன்விழைத்தரத்தின்** (degree of freedom) படி எனப்படும்.

கட்டிறுக்கப் பொருள், பல துகள்களின் தொகுப்பு என்று கருதி, அதன் ஒவ்வொரு புள்ளியின் இருப்பிடத்தையும் பொதுப்படுத்திய கூறுகளின் சார்புகளாக எழுத முடியும். எடுத்துக்காட்டாக, சதுரம் $PQRS$ ல் PS, PQ பக்கங்களிலிருந்து முறையே ξ, η தூரத்தி லிருக்கும் H என்ற புள்ளியின் கார்ட்டீசியன் கூறுகள் x, y எனில்,

$$x = x_1 + \xi\cos\theta - \eta\sin\theta.$$

$$y = y_1 + \xi\sin\theta + \eta\cos\theta.$$

கொடுத்துள்ள பொருள் தொகுப்பின் பொதுப்படுத்தப்பட்ட கூறுகளை $q_1, q_2, \ldots q_n$ என்று குறிப்பிடுவது வழக்கம். இப்பொருள் களிலொன்றின் ஒரு புள்ளியின் கார்ட்டீசியன் கூறுகள் (x, y, z) எனில், x, y, z ஒவ்வொன்றும் q_1, q_2, q_n அனைத்திலும் சார்பு :

$$x = x(q_1, \ldots, q_n)$$

$$y = y(q_1, \ldots, q_n)$$

$$z = z(q_1, \ldots, q_n).$$

பொருள் தொகுப்பு, $(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ என்ற கூறு மதிப்புகள் வரையறுக்கும் இடத்திலிருந்து, $(q_1+\delta q_1, \ldots q_n+\delta q_n)$ என்பன வரை யறுக்கும் இடத்திற்கு நகர்ந்தால், (x, y, z)லிருந்த துகள் $(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z)$ என்ற புள்ளிக்குச் செல்கிறது என்க. அப்போது

$$\delta x = \frac{\partial x}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2}\delta q_2 + \ldots + \frac{\partial x}{\partial q_n}\delta q_n$$

$$= \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial x}{\partial q_r}\delta q_r .$$

இவ்வாறே $\delta y = \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial q_r}\delta q_r$, $\delta z = \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial z}{\partial q_r}\delta q_r$.

1·11 பொதுப்படுத்தப்பட்ட விசைகள்

மேற்கூறிய பொருள் தொகுப்புகளின் மீது ஒரு விசைக்களம் (field of force) தாக்குகிறது என்க. (x_j, y_j, z_j) என்ற புள்ளியில்

தாக்கும் விசை (X_j, Y_j, Z_j) எனில், அங்கு கூறிய சிறு அசைவினுல் இவ்விசை செய்யும் வேலையின் அளவு

$$X_j \delta x_j + Y_j \delta y_j + Z_j \delta z_j$$

$$= X_j\left(\Sigma \frac{\partial x_j}{\partial q_r}\delta q_r\right) + Y_j\left(\Sigma \frac{\partial Y_j}{\partial q_r}\delta q_r\right) + Z_j\left(\Sigma \frac{\partial Z_j}{\partial q_r}\delta q_r\right)$$

$$= \sum_{r=1}^{n}\left\{X_j \frac{\partial x_j}{\partial q_r} + Y_j \frac{\partial y_j}{\partial q_r} + Z_j \frac{\partial z_j}{\partial q_r}\right\}\delta q_r .$$

இவ்விதம் பொருள் தொகுப்பின் பல்வேறு புள்ளிகளிலும் தாக்கும் விசைகள் செய்யும் வேலைகளைக் கணக்கிட்டுக் கூட்ட, மொத்த வேலை

$$Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \ldots\ldots + Q_n \delta q_n$$

என்ற வடிவில் அமையும். இங்கு

$$Q_r = \sum_j \left\{X_j \frac{\partial x_j}{\partial q_r} + Y_j \frac{\partial y_j}{\partial q_r} + Z_j \frac{\partial z_j}{\partial q_r}\right\} .$$

$Q_1, Q_2, \ldots\ldots, Q_n$ என்பன பொதுப்படுத்தப்பட்ட விசைகள் (generalised forces) எனப்படும்.

(iii) கோள முக்கோண அளவியல்

ஒரு கோளத்தின் மீதுள்ள இரு புள்ளிகளுக் கிடையேயுள்ள "தூரம்," அப்புள்ளிகளின் வழியே செல்லும் பெரு வட்டத்தில் அவைகளை முனைப்புள்ளிகளாகக் கொண்ட சிறு வில்லின் நீளமாகும்.

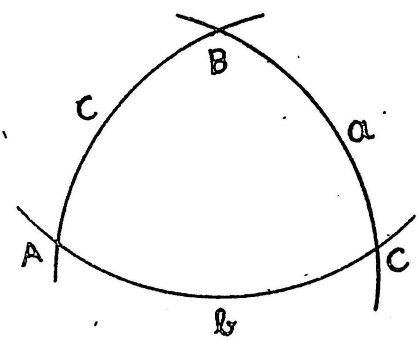
பெரு வட்டங்கள் இரண்டின் தளங்கள், கோளவிட்ட மொன்றில் வெட்டிக் கொள்ளும். பெருவட்டத்திற்குச் செங்குத்தான விட்டம் கோளத்தினை வெட்டும் புள்ளிகள் துருவங்கள் (poles) எனப்படும். இரு பெரு வட்டங்களுக் கிடையேயுள்ள கோண அளவு, அவற்றின் துருவங்களுக்கிடையேயுள்ள தூரத்திற்குச் சமமாகும்.

மூன்று பெருவட்டங்கள் ஒரே விட்டத்தின் வழியாகச் செல்லா திருந்தால் கோள முக்கோணத்தை ஆக்குகின்றன. இதன் பக்கங் களும் கோணங்களும் கோண அளவுகளிலேயே அளக்கப்படு கின்றன. பொதுவாக இந்த அளவுகள் 180°க்குக் குறைவானவை யாகவே எடுத்துக் கொள்ளப்படுகின்றன (இத்தகைய முக்கோ ணங்கள் ஆய்லர் முக்கோணங்கள் எனப்படும்). கோள முக்கோ ணத்தின் கோணங்களின் கூடுதல் 180°க்கு மேற்பட்டிருக்கும் என்பதைக் கவனிக்க.

ஒரு தளத்திரிகோணமிதியில் முக்கோணங்களின் பக்கங்களை யும் கோணங்களையும் ஈடுபடுத்திப் பல சூத்திரங்கள் உள்ளது போலவே, கோளத் திரிகோணமிதியிலும் பல சூத்திரங்கள் உள்ளன. அவற்றில் சில அடியில் தரப்பட்டுள்ளன.

(a) **சைன் விதி**

ஒவ்வொரு பக்கத்தின் சைனும், அதன் எதிர் கோணத்தின் சைனுக்கு நேர் விகிதத்திலமையும். அதாவது



படம் 1·8

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$$

(b) **கொசைன் விதி** (பக்கத்திற்கு)

ஒரு பக்கத்தின் கொசைனனது, மற்ற இரு பக்கங்களின் கொசைன்களின் பெருக்கற்பலனுடன், அவற்றின் சைன்களையும் எதிர் கோணத்தின் கொசைனையும் பெருக்கி வந்த தொகையைக் கூட்டிப் பெறத்தக்கது. அதாவது படத்தில்

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

எழுத்துக்களை வட்டச்சீராக மாற்றி இதுபோன்று இன்னும் இரு சூத்திரங்களை எழுதலாம்.

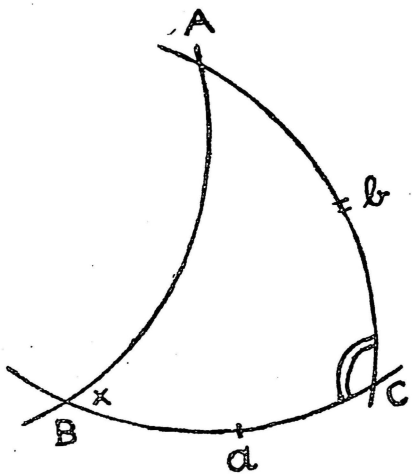
(c) **கொசைன் விதி** (கோணத்திற்கு)

ஒரு கோணத்தின் கொசைனனது, மற்ற இரு கோணங்களின் சைன்களையும், எதிர்ப்பக்கத்தின் கொசைனையும் பெருக்கி வந்த தொகையினின்று, மற்ற இரு கோணங்களின் கொசைன்களின் பெருக்கற் பலனைக் கழித்துப் பெறத்தக்கது. அதாவது

$$\cos C = \sin A \sin B \cos c - \cos A \cos B.$$

இது போன்று இன்னும் இரு சூத்திரங்களை, இதில் எழுத்துகளை வட்டச்சீராக மாற்றிப் பெறலாம்.

(d) **கோடான்ஜண்ட் விதி** (நான்கு பாக விதி)



படம் 1·9

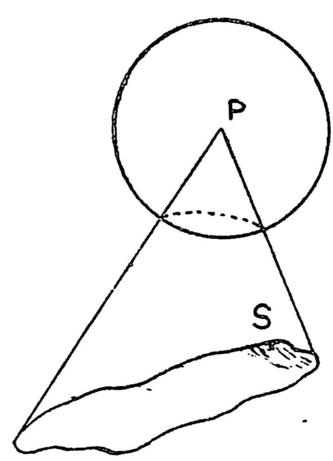
நான்கு அடுத்துள்ள பாகங்கள் (இரு கோணங்கள், இரு பக்கங்கள்) தரப்பட்டிருந்தால், எதிர்கோணத்தின் கோடான்ஜண்டை நடுக் கோணத்தின் சைனால் பெருக்கி வரும் தொகையானது, எதிர்ப் பக்கத்தின் கோடான்ஜண்டை நடுப்பக்கத்தின் சைனால் பெருக்கிவரும் தொகையிலிருந்து, இரு நடுப் பாகங்களின் கொசைன்களின் பெருக்கற்பலனைக் கழித்து வருவதாகும். எடுத்துக் காட்டாக,

$$\cot B \sin C = \cot b \sin a - \cos C \cos a,$$
$$\cot A \sin C = \cot a \sin b - \cos b \cos C.$$

$A, B, C\,;\ a, b, c$ ஆகியவற்றை வட்டச்சீராக மாற்றி இவற்றிலிருந்து இன்னும் இரு சோடி உண்மைகளைப் பெறலாம்.

(iv) கன கோணம்

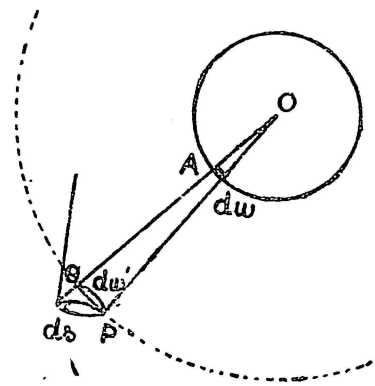
S என்பது ஒரு திறந்த வளைபரப்பு, P என்பது அதன் மீதமையாத ஒரு புள்ளி என்க. P ஐ மையமாகக் கொண்டதும், ஒரு அலகு ஆரமுள்ளதுமான ஒரு கோளம் வரைக. S-ன் விளிம்பை P யுடன் சேர்க்கும் கூம்பு இக் கோளத்தை ஒரு மூடிய வளைவில் வெட்டும். இவ் வளைவினால் அடைக்கப்பட்டு, கூம்புக்குள் இருக்கும் கோளப் பரப்பினை, S ஆனது P-ல் தாங்கும் கன கோணம் என்போம். P யிலிருந்து பார்க்கும்போது S குவிந்திருந்தால் இக்கோணம் மிகை (positive) யென்றும், கவிந்திருந்தால் குறையென்றும் (negative) கருதப்படும். dS எனும் சிறுபரப்பு P-ல் தாங்கும் கனகோள



படம் 1·10

அளவு dw எனில், $dw = \dfrac{dS \cos\theta}{r^2}$ என்பதை எளிதில் நிறுவலாம்.

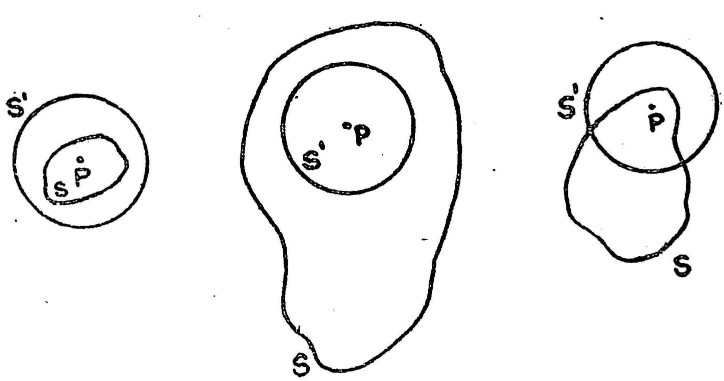
படத்தில் dw, dw' என்பன முறையே 1, r அலகு ஆரமுள்ள இரு கோளங்களில் கூம்புவெட்டும் பரப்பளவுகள் எனில், $\frac{dw}{1} = \frac{dw'}{r^2}$.



படம் 1·11

$$\text{ஆனால் } dw' = dS \cos\theta. \text{ எனவே } dw = \frac{dS \cos\theta}{r^2}.$$

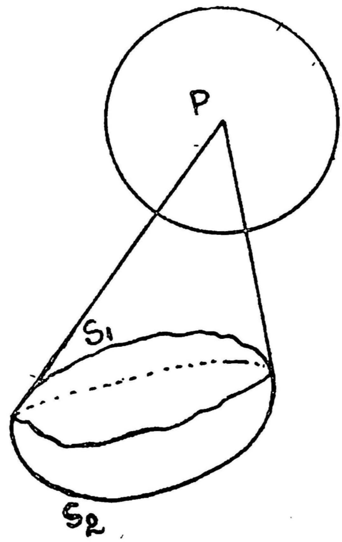
S என்பது ஒரு எளிய மூடிய வளைபரப்பு, P அதனுட்புறம் உள்ள ஏதேனுமொரு புள்ளி என்றால் S ஆனது P-ல் தாங்கும் மொத்த கன கோணம் 4π என்பது அடுத்துள்ள படங்களிலிருந்து விளங்கும்.



படம் 1·12

இங்கு S' என்பது, Pயை மையப்புள்ளியாகவும் ஒரு அலகு ஆரமும் கொண்ட கோளம்.

P ஆனது S-க்கு வெளிப்புறமுள்ள புள்ளியெனில், P லிருந்து S-க்கு வரையப்பட்ட தொடு கூம்பு, Sஐ S_1, S_2 என்ற இரு பகுதி



படம் 1·13

களாகப் பிரிக்கிறது. இங்கு S_2 குவிந்தும், S_1 கவிந்தும் இருக்கிறது. மேலும் S_1, S_2 என்பன Pல் தாங்கும் கன கோணங்கள் தனிமதிப்பில் சமம். எனவே S ஆனது P-ல் தாங்கும் மொத்த கனகோணம் பூச்சியமாகும்.

2. கெப்ளரின் விதிகள்

2·1 பழங்காலத்தில் மக்கள் சூரியனும் கிரகங்களும் நட்சத்திரங்களும் பூமியைச் சுற்றி வருவதாகவும், பூமி மட்டும் நிலையாக, அசையாமல் இருக்கிறதென்றும் நினைத்து வந்தனர். அரிஸ்டாடல் என்ற கிரேக்க மேதை, விண்பொருள்கள் ஒரு கோளத்தின் மேல் இருப்பதாகக் கருதினர். பதினாரும் நூற்றாண்டில் கோப்பர்னிகஸ் என்ற போலந்து நாட்டு மேதை, முப்பது வருட காலம் விண்மீன்களைக் கவனித்து இக்கூற்றுகள் தவறு என்று கண்டார். கோப்பர்னிகஸ் கண்டு பிடித்த உண்மையாவது: எல்லா கிரகங்களும், பூமியும் கூட, சூரியனைச் சுற்றி வருகின்றன. இவற்றின் பாதைகள் வட்ட வடிவமானவை. மேலும் பூமி தன்னைத் தானே ஒரு அச்சைச்சுற்றிச் சுழல்கிறது. சூரியன் வட்டத்தின் மையத்தில் இல்லை; அது பூமியின் வட்டப்பாதையின் மையத்தைச் சுற்றி சிறிது நகர்ந்து வருகிறது.

டைக்கோ பிராகி (Tycho-Brahe) என்பவர் டென்மார்க் நாட்டைச் சேர்ந்த ஒரு பிரபுவின் மகன். இவருக்கு சிறு வயதிலேயே வான் இயலில் மிகவும் ஈடுபாடு இருந்தது. சுமார் இருபது வருட காலம் இவரும், இவரது உதவியாளர்களும் கிரகங்களையும் விண்மீன்களையும் கண்டு அவற்றின் இடங்களைப் பற்றி பதிவு செய்து வந்தனர். தான் கண்ட காட்சிப் பதிவுகள் மூலம் இவர் முடிவு செய்ததாவது :- பூமியைத் தவிர மற்ற கிரகங்கள் சூரியனைச் சுற்றி வருகின்றன; சூரியன் உள்பட இவையனைத்தும் பூமியைச் சுற்றி வருகின்றன. டைக்கோ பிராகியிடம் நிறைய காட்சிப் பதிவு விவரங்கள் இருந்த போதிலும், அவற்றைச் சோதித்து உண்மைகளை அறியத் தேவையான கணித ஆற்றல் அவரிடம் இல்லை. இத்தகைய பரிசீலனை செய்ய வந்தவரே கெப்ளர் ஆவார்.

டைக்கோ பிராகி இறந்ததும் கெப்ளர் அவர் பதவியில் பிராகா (Praha) வின் வானிலை ஆராய்ச்சிக் கூடத் தலைவரானார். டைக்கோ பிராகியின் நோட்டுப் புத்தகத்தில் பதிவு செய்யப்பட்டிருந்த விவரங்களை ஆராய்ந்து ஐந்து வருடங்களுக்குப் பிறகு 1609-ல் பின் வரும்

முடிவுகளைப் பெற்றார். இவையே **கெப்ளரின் விதிகள்** என்று பெயர் பெற்றன. அவையாவன :

1. (a) சூரியனைச் சுற்றி கிரகங்களின் பாதைகள் ஒவ்வொன்றும் ஒரு நிலையான தளத்தில் அமைகிறது. இத்தளம் சூரியனின் மெய் யான இருப்பிடம் வழியே செல்லுகிறது.

(b) இப்பாதை ஒவ்வொன்றும், சூரியனை ஒரு குவியமாகக் (focus) கொண்ட நீள் வளையம் (ellipse) ஆகும்.

2. ஒரு கிரகப் பாதையின் இரு புள்ளிகளுக்கு, சூரியனிலிருந்து வரையப்பட்ட ஆரைகளால் ஏற்படும் நீள்வளையக் கோணப் பகுதி யின் பரப்பு, அந்த கிரகமானது அவ்விரு புள்ளிகளில் ஒன்றிலிருந்து மற்றதற்குச் செல்லும் கால அளவினுடன் நேர்மாறுகிறது (directly varies).

பொதுவாக 1(b) என்று குறிக்கப்பட்ட விதியே கெப்ளரின் முதல் விதி என்று பெயர் பெற்றிருக்கிறது. ஆயினும் 1(a) லுள்ள விதியும் முக்கியமானதே. டாலமியின் நினைப்பிலும், கோப்பர்னிகஸின் கருத்துப்படியும், ஒரு கிரகத்தின் பாதையானது, சூரியனின் **சராசரி** இடத்தின் வழியே செல்லும் வட்டமாகவே இருந்தது. கெப்ளர் தான் முதன் முறையாக, சூரியனின் இடம் நகராதது, நிலையானது என்று கண்டார். மேலும், இந்த நிலையான இடம், நீள் வளையத்தி னுள் அமைந்த ஏதோ ஓர் புள்ளி என்னுமல், நீள்வளையத்தின் **குவியம்** என்று கண்டு பிடித்தது மிகவும் பாராட்டத் தக்கது.

இப்போது கெப்ளரின் முதல் விதியை எடுத்துக் கொள்வோம். இதன்படி கிரகமொன்றின் பாதை, ஒரு தளத்திலமைந்துள்ளது. A, B என்பன இத்தகைய ஒரு பாதையில் இரு புள்ளிகள் என்க, P என்பது இத்தளத்தின் மேலமையாத மற்றொரு புள்ளி எனில். Aயும் Pயும் மற்றொரு தள வளைவுப்பாதைமேல் (plane curve) இருக்கும் ; Bயும் Pயும் இன்னொரு தள வளைவுப்பாதைமேல் இருக்கும். இம்மூன்று தளங்களும் O எனும் ஒரு புள்ளி வழியே செல்லும் (அல்லது ஒரு முப்பட்டை (prism) யை ஆக்கும்). ஒரு தளத்தில் நகரும் புள்ளியின் வேக வளர்ச்சி வீதம் அத்தளத்திலேயேதானே இருக்கும்? A எனும் புள்ளியின் வேக வளர்ச்சி வீதம் OAB, OAP ஆகிய இரு தளங்களிலும் இருக்க வேண்டுமல்லவா ? ஒரு புள்ளியின் வேக வளர்ச்சி வீதத்தின் மதிப்பு அப்புள்ளியின் இருப்பிடத்தை மட்டுமே பொறுத்தது என்று கொண்டால், Aயின் வேக வளர்ச்சி வீதம் இவ்விரு தளங்களின் பொதுக்கோடான OA யில் தான் ஏற்படும். இவ்வாறே B யின் வேக வளர்ச்சி வீதம் OB யில் இருக்கும். OAயும் OBயும் O வினைத் தீர்மானிக்கின்றன. எனவே P எனும் எந்தப் புள்ளியின் வேக வளர்ச்சி வீதமும் Oவினை

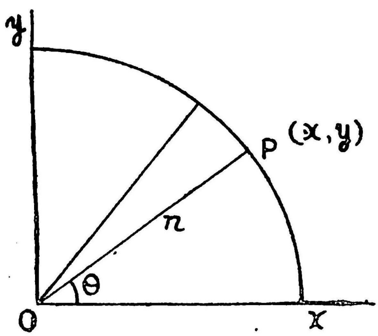
நோக்கியே அமையும். கெப்ளரின் முதல் விதிப்படி கிரகங்களின் பாதைகள் தளங்களில் அமைவதாலும், இத்தளங்களனைத்தும் சூரியனை உள்ளடக்கி இருப்பதாலும், O என்பது சூரியனின் இருப்பிடத்தையே குறிக்கும் என்று அறிகிறோம்.

கெப்ளரின் இரண்டாவது விதியை இப்போது ஆராய்வோம். கெப்ளர் இவ்விதியைக் கண்டு பிடித்ததே ஒரு அதிருஷ்டம் என்று சொல்லலாம். கெப்ளரின் காலத்தில் நுண்கணிதம் கண்டுபிடிக்கப் படவில்லை. ஆகவே கெப்ளர் பல எடுகோள்களை மேற்கொண்டு இவ்விதியைத் தருவித்தார். இந்த எடுகோள்களில் பல தவறானவை. எடுத்துக்காட்டாக, (i) முதலில் கெப்ளரின் இதற்கான கணக்கீட்டில், கிரகங்கள் சூரியனைச் சுற்றி வட்டப்பாதையில் செல்வதாகவும், ஆனால் சூரியன் வட்டமையத்திலில்லாமல் சற்று தள்ளி இருப்பதாகவும் எடுத்துக்கொள்ளப்பட்டது. (நீள் வளைய எடுகோள் பின்னரே பின்பற்றப்பட்டது). இரண்டாவதாக, (ii) கிரகப் பாதையில் ஒரு சிறு வில்லை (small arc)க் கடக்க கிரகம் எடுத்துக் கொள்ளும் நேரமானது, சூரியனிலிருந்து அப்போது கிரகத்திற்கான தூரத்துடன் நேர்மாறுகிறது என்றும், (iii) எனவே எந்த ஒரு வில்லையும் கடக்க எடுத்துக் கொள்ளும் நேரமானது, அந்த வில்லின் புள்ளிகளுக்குச் சூரியனிலிருந்து வரையப்பட்ட ஆரைகளின் கூட்டுத் தொகையுடன் நேர்மாறும் என்றும், (iv) இத்தகைய கூட்டுத் தொகையானது அந்த வில்லின் முடிவுப் புள்ளிகள் வழியே சூரியனிலிருந்து வரையப்பட்ட ஆரைகளினால் ஏற்படும் கோணப்பகுதியின் பரப்பளவு ஆகும் என்றும் கெப்ளர் எடுத்துக்கொண்டார். இவை ஒவ்வொன்றும் தவறான எடுகோள்கள் என்பது தற்காலத்தில் நமக்கு எளிதில் விளங்கும். ஆயினும் இத்தகைய அடிப்படைகளிலிருந்து தொடங்கி கெப்ளர் கண்டறிந்த விதி மட்டும் மெய்யானதாயிற்று. இது எத்தகைய அதிருஷ்டம் என்பது எண்ணிப் பார்த்தால் விளங்கும்.

கெப்ளரின் கண்டுபிடிப்புகள் அதிருஷ்டவசமாகக் கிடைத்தவை என்று தள்ளிவிட முடியாதவை. பல ஆண்டுகள், தொடர்ந்து ஒவ்வொரு நாளும் இரவு பகலாக உழைத்ததன் பலனாகவே சிறிது அதிருஷ்டமும் கிட்டியது எனக் கருதலாம். கெப்ளரின் ஆராய்ச்சியில், அவர் பல கோட்பாடுகளைச் சீர்தூக்கிப் பார்க்க வேண்டியிருந்தது. அவற்றில் பொருந்தாதனவற்றை விட்டு, பொருந்துபவை போல் தோன்றுபவற்றை மீண்டும் நுணுக்கமாக ஆராய்ந்து, நேர் காட்சிப் பதிவுகள் மூலம் சரிபார்த்து, அவற்றில் மிகவும் பொருத்தமான கோட்பாட்டையே விதியாக முடிவு செய்ய வேண்டியிருந்தது. ''துணிவு கொண்டவருக்கே அதிருஷ்டம் உதவும்'' (Fortune favours the brave) என்ற பழமொழிக்கு கெப்ளர் ஒரு உதாரணமாகத் திகழ்கிறார்.

கெப்ளரின் இரண்டாம் விதியை, அவரது முதல் விதியினின்று தருவித்தல் நுண்கணித அறிவு பெற்ற நமக்கு எளிதாகும்.

(x, y) என்பது சூரியனை ஆதிப்புள்ளியாகக் கொண்ட அச்சுகளைப் பொறுத்து ஒரு கிரகத்தின் கூறுகள் என்க. கிரகம் P, சூரியன் O, $\underline{|POx} = \theta$ எனில், முதல் விதியின் விளைவுப்படி, P-ன் வேக வளர்ச்சி வீதத்தின் திசை PO ஆகும். அதாவது



$$\frac{d^2 y}{dt^2} \Big\backslash \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{y}{x}$$

எனவே $x\,\dfrac{d^2 y}{dt^2} - y\,\dfrac{d^2 x}{dt^2} = 0$

படம் 2.1

$$\therefore \frac{d}{dt}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = 0$$

$\therefore x\dfrac{dy}{dt} - y\dfrac{dx}{dt} =$ நிலையான எண் $= h$ என்க.

$\frac{1}{2}\left(x\dfrac{dy}{dt} - y\dfrac{dx}{dt}\right)$ என்பதே பரப்பளவு வேகம். இதுவே $\frac{1}{2} r^2 \dfrac{d\theta}{dt}$.

$r^2 \dfrac{d\theta}{dt} = h$ என்பதால் $\displaystyle\int_{\theta_1}^{\theta^2} r^2\, d\theta = ht.$

இதுவே கெப்ளரின் இரண்டாவ்து விதி என்பது வெளிப்படை.

மறுதலையாக. இரண்டாம் விதியிலிருந்து, முதல் விதியின் முதற்பகுதியைத் தருவிக்கலாம்; மேற் குறிப்பிட்ட நிருபணத்தை அடியிலிருந்து மேலாக மாற்றியமைப்பதன் மூலம் இது நிரூபிக்கப் படுகிறது.

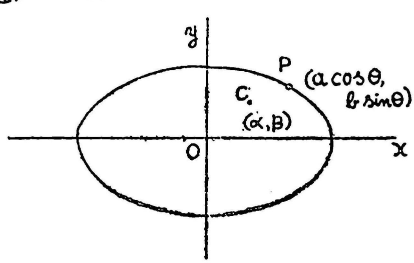
கெப்ளரின் முதலிரண்டு விதிகளும் முதலில் செவ்வாய் கிரகத்திற்குச் சரிபார்க்கப்பட்டு, பின்னர் மற்ற கிரகங்களுக்கும் கெப்ளரால் சரிபார்க்கப்பட்டன. இவ்விதிகள் ஒவ்வொன்றும், ஒரு தனித்த கோளின் பாதையைப் பற்றியே விவரிக்கின்றன. பத்தாண்டுகளுக்குப் பின்னர் 1619-ல் கெப்ளர் தனது மூன்றும் விதியினை அறிவித்தார். இது இரு வெவ்வேறு கிரகங்களின் போக்குகளை ஒப்பிட்டு பார்க்கிறது. இம் **மூன்றும் விதியாவது :**

ஒரு கிரகம் சூரியனை ஒரு முறை சுற்றுவதற்கான கால அளவின் வர்க்கமானது அக்கிரகத்துக்கும் சூரியனுக்குமுள்ள சராசரித் தொலைவின் கனத்துடன் நேர்மாறல் கொண்டுள்ளது.

இங்கு சராசரித் தொலைவு (mean distance) என்பது நீள் வளையப் பாதையின் நெட்டச்சில் (major axis) பாதியாகும்.

இவ்விதியானது தோராயமாக மெய்யானதே தவிர, மிகச் சரியானதல்ல. இது பற்றி பின்னர் விவரிப்போம்.

2·2 கெப்ளரின் விதிகளிலிருந்து, கிரகங்களின் வேக வளர்ச்சி வீதத்தின் திசைகளையே நாம் பெற முடிந்தது. அவற்றின் அளவு களைப் பற்றி இது வரை நாம் ஆராயவில்லை. இப்போது ஒரு நீள் வளையப் பாதையில், அதனுள் அமைந்த ஒரு நிலையான புள்ளியினை நோக்கி வேக வளர்ச்சி வீதம் அமைந்திருக்குமாறு, செல்ல எவ்வளவு விசை வேண்டும், அவ்விசையின் விதி (law of force) என்ன என்று ஆராய்வோம்.



படம் 2.2

நீள் வளையத்தின் சமன்பாட்டை $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்றுகொள்க. வேக வளர்ச்சி வீதம் $C(\alpha, \beta)$ என்ற புள்ளி வழியே செல்கிறது என்க. $(a \cos\theta, b \sin\theta)$ கூறுகள் கொண்ட P எனும் புள்ளியின் வேக வளர்ச்சி வீதக் கூறுகள் $\frac{d^2}{dt^2}(a\cos\theta), \frac{d^2}{dt^2}(b \sin \theta)$ ஆகும்; அதாவது

$$-a\sin\theta\frac{d^2\theta}{dt^2} - a\cos\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2, \quad -b\sin\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + b\cos\theta\frac{d^2\theta}{dt^2}.$$

வேக வளர்ச்சி வீதத்தின் திசை PC என்பதால்

$$\frac{-a\sin\theta\dfrac{d^2\theta}{dt^2}-a\cos\theta\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2}{a\cos\theta-\alpha}=\frac{-b\sin\theta\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2+b\cos\theta\dfrac{d^2\theta}{dt^2}}{b\sin\theta-\beta}$$

$$\therefore\ \frac{d^2\theta}{dt^2}(a\beta\sin\theta-\alpha b\cos\theta+ab)=(-\alpha b\sin\theta+a\beta\cos\theta)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2.$$

$$\therefore\ \frac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)}{\dfrac{d\theta}{dt}}=\frac{-\alpha b\sin\theta+a\beta\cos\theta}{-a\beta\sin\theta-\alpha b\cos\theta+ab}\quad\frac{d\theta}{dt}.$$

தொகைப்படுத்த, $\log\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)=-\log(-a\beta\sin\theta-\alpha b\cos\theta+ab)$ $+\log h$ ($\log h$ ஒரு தொகுப்புக் கணக்கீட்டு மாறிலி).

$$\therefore\ \frac{d\theta}{dt}=h(-a\beta\sin\theta-\alpha b\cos\theta+ab)^{-1}.$$

மறு முறை தொகைப்படுத்த,

$$+a\beta\cos\theta-\alpha b\sin\theta+ab\theta=h\ (t-t_0).$$

hக்குப் பதிலாக abn என்றிட,

$$\theta-\frac{\alpha}{a}\sin\theta-\frac{\beta}{b}\cos\theta=n(t-t_0).$$

இயல் முறை வடிவ கணிதத்தில் θ என்பது மைய அகற்சிக் கோணம் (eccentric angle) எனப்படும். வானவியலில் இது மைய வகற்சி நெறிப் பிறழ்ச்சி (eccentric anomaly) எனப்படும்; E என்ற எழுத்தால் குறிப்பிடப்படும். எனவே

$$E-\frac{\alpha}{a}\sin E-\frac{\beta}{b}\cos E=n\ (t-t_0) \qquad (1)$$

ஒரு கிரகம், தனது பாதையில் ஒரு முழுச் சுற்று சுற்றிவர ஆகும் காலம் T என்க. Tஐக் **கால வட்ட நேரம்** (periodic time) என்போம். Eக்குப்பதில் $2\pi+E$ என்று எழுதினுல் t ஆனது $t+T$ ஆகும். அதனுல் $2\pi+E-\dfrac{\alpha}{a}\sin E-\dfrac{\beta}{b}\cos E=n(t+T-t_0)$..(2)

(2) லிருந்து (1) ஐக் கழிக்க, $2\pi=nT$. அதாவது $T=\dfrac{2\pi}{n}$, அல்லது $n=\dfrac{2\pi}{T}$. n என்பது **சராசரி இயக்கம்** (mean motion) எனப்படும்.

இப்போது வேக வளர்ச்சி வீதக் கூறுகளை Eன் சார்புகளாக எழுதுக.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -a \sin E \frac{d^2E}{dt^2} - a \cos E \left(\frac{dE}{dt}\right)^2$$

$$= \left\{ -a \sin E. \frac{(-\alpha b \sin E + a\beta \cos E)}{-a\beta \sin E - \alpha\, b \cos E + ab} - a \cos E \right\} \left(\frac{dE}{dt}\right)^2$$

$$= \frac{\{+\alpha ab\, (\sin^2 E + \cos^2 E) - a^2 b \cos E\}\, h^2}{(a\, b - a\beta \sin E - \alpha b \cos E)^3}$$

$$= \frac{abh^2\, (\alpha - a \cos E)}{(a\, b - a\beta \sin E - \alpha b \cos E)^3}.$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -b \sin \theta \left(\frac{dE}{dt}\right)^2 + b \cos E \frac{d^2E}{dt^2}$$

$$= \left\{ -b \sin E + b \cos E \left(\frac{-\alpha b \sin E + a\beta \cos E}{ab - a\beta \sin E - \alpha b \cos E}\right)\right\} \left(\frac{dE}{dt}\right)^2$$

$$= \frac{ab\, h^2\, (\beta - b \sin E)}{(ab - a\beta \sin E - \alpha b \cos E)^3}.$$

எனவே மொத்த வேக வளர்ச்சி வீதம் $= \left\{ \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$

$$= \frac{ab\, h^2 \sqrt{(\alpha - a \cos E)^2 + (\beta - b \sin E)^2}}{(ab - a\beta \sin E - \alpha b \cos E)^3}.$$

இப்போது $CP = r = \sqrt{(\alpha - a \cos E)^2 + (\beta - b \sin E)^2}$, $h \equiv ab\, n$ என்றிட, மொத்த வேக வளர்ச்சி வீதம்

$$R = \frac{n^2 r}{\left(1 - \frac{\alpha}{a} \cos E - \frac{\beta}{b} \sin E\right)^3}$$

என்று கிடைக்கிறது.

(α, β) என்பது நீள் வளையத்தின் மையப் புள்ளி இல்லையாயின், $1 - \frac{\alpha x}{a^2} - \frac{\beta y}{b^2} = 0$ என்பது (α, β)-ன் இசைக் கோடு (polar line).

இவ்விசைக் கோட்டிற்கு ($a\cos E$, $b\sin E$) யிலிருந்து வரையப்பட்ட செங்குத்துத்தூரம் q, மையப் புள்ளியிலிருந்து வரையப்பட்ட செங்குத்துத் தூரம் q_0, எனில்,

$$q = \frac{1 - \frac{\alpha}{a}\cos E - \frac{\beta}{b}\sin E}{\sqrt{\frac{\alpha^2}{a^4} + \frac{\beta^2}{b^4}}}, \quad q_0 = \frac{1}{\sqrt{\frac{\alpha^2}{a^4} + \frac{\beta^2}{b^4}}}.$$

ஆகவே $R = \frac{n^2 r\, q_0^3}{q^3}$. இதுவே ஹாமில்டனின் தேற்றம்.

பொதுவில், $c \neq 0$ எனில் $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ (1) என்ற சமன்பாட்டினைக் கொண்ட பாதையை மேற்கொள்ளும் கிரகத்தின் வேக வளர்ச்சி வீதம்

$$R = \frac{Kr}{(gx + fy + c)^3} \tag{2}$$

இங்கு வேக வளர்ச்சி வீதம் ஆதிப் புள்ளியை நோக்கியுள்ளது.

2·3 பெர்ட்ராண்டின் கேள்வி

(1)ல் கூறிய விதியைத் தவிர வேறெந்த விதிக்குட்பட்டு ஒரு கிரகம் நீள் வளையப் பாதையை மேற்கொள்ளும் என்று இனி ஆராய்வோம்.

$R = \frac{Kr}{\phi(x, y)}$ என்ற விதிப்படி நீள் வளையப் பாதை அமையுமெனில்,

$$\frac{Kr}{(gx + fy + c)^3} = \frac{Kr}{\phi(x, y)}.$$

எனவே $\phi(x, y) = (gx + fy + c)^3$. நீள் வளையப் பாதையிலுள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியும் இந்த சமன்பாட்டைச் சரி செய்யும். வேறு விதத்தில் கூறுமிடத்து, நீள் வளையத்தின் சமன்பாட்டை (1) இந்த விதத்தில் எழுத முடிய வேண்டும். இதனை அடியிற் கண்ட விதங்களில் செய்யலாம்,

$$gx + fy + c = -\tfrac{1}{2}(ax^2 + 2hxy + by^2 - c) \tag{3}$$

$$(gx + fy + c)^2 = -\{(ac - g^2)x^2 + 2(ch - gf)xy + (bc - f^2)y^2\} \tag{4}$$

எனவே $\phi(x, y) = (c - ax^2 - 2hxy - by^2)^3$

அல்லது $\phi(x, y) = \{(g^2 - ac)x^2 + 2(gf - ch)xy + (f^2 - bc)y^2\}^{\frac{3}{2}}$.

இவற்றில் (3)ல் தந்த விதி தரப்பட்டிருந்தால் a : b : h : c என்பன கொடுத்துள்ள விகிதங்கள் ; ஒரு இருபடி வளைவின் சமன்பாட்டை

நிறுவ ஐந்து எண்களே தேவையாதலால், இன்னும் இரு எண்களே கண்டுபிடிக்கப்பட வேண்டியவை. தொடக்க நிபந்தனைகளோ (initial conditions) பொதுவில் மூன்று சமன்பாடுகளைத் தரும்; அவை (x_0, y_0) என்பது பாதையில் ஒரு புள்ளி, அங்கு வேகத்தின் கூறுகள் u_0, v_0 என்று கொள்ளலாம். ஆகவே பொதுவில் மூன்று நிபந்தனைகளையும் சரி செய்யுமாறு இரு குணகங்களைக் கண்டு பிடித்தல் இயலாது.

$$\phi(x, y) = (lx^2 + 2mxy + ny^2)^{\frac{3}{2}}$$

என்று தரப்பட்டிருந்தால், a : b : c : f : g : h என்ற ஐந்து குணக விகிதங்களுக்கிடையே

$$\frac{g^2 - ac}{l} = \frac{gf - ch}{m} = \frac{f^2 - bc}{n}$$

என்ற இரு சமன்பாடுகளே தரப்பட்டுள்ளபடியால், மற்ற மூன்றினை யும் மூன்று தொடக்க நிபந்தனைச் சமன்பாடுகளையும் சரி செய்யுமாறு எடுத்துக்கொள்ள இயலும். எனவே $R = \frac{Kr}{(lx^2 + 2mxy + hy^2)^{\frac{3}{2}}}$ (5)

என்ற விதிப்படியும் இருபடி வளைவை கிரகமானது மேற்கொள்ள இயலும் என்று அறிகிறோம். இவ்வாறு (2)ம் (5)ம் தான் இருபடி வளைவிற்கான விதிகளாகும்.

முன் கூறியது போலவே, கெப்ளர் இயக்க விசையியல் தத்துவங்களை அறிந்திருக்கவில்லை. அவரது கண்டுபிடிப்புகள் யாவும் காட்சிப் பதிவுகளை அடிப்படையாகக் கொண்டவையே. இக்கண்டு பிடிப்புகளுக்கு இயக்க விசையியல் அடிப்படையில் விளக்கம் கொடுத்தவர் ஐஸக் நியூட்டன் (1642—1727) ஆவார்.

§ **2.4** நியூட்டனின் இயக்க விதிகள் மூன்று. அவையாவன:

1. மாருத திணிவுடைய துகள் ஏதேனுமொரு விசையினுல் தாக்கப்பட்டாலன்றி, அசையாத நிலையிலிருக்கும்; அல்லது ஒரே சீரான வேகத்தில் ஒரு கோட்டில் நகர்ந்துகொண்டிருக்கும்.

2. ஒரு விசையினுல் தாக்கப்பட்டு நகரும் துகளின் கோட்டு உந்தத் (linear momentum) தின் வளர்ச்சி வீதம், அவ்விசைக்கு நேர்மாறல் கொண்டுள்ளது.

3. இரு துகள்கள் ஒன்றின் மேலொன்று விசை செலுத்துமாயின், முதல் துகளானது இரண்டாம் துகளின் மீது செலுத்தும் விசையானது, இரண்டாம் துகள் முதல் துகளின் மீது செலுத்தும் விசைக்கு அளவில் சமமாக இருக்கும்; ஆனுல் நேர் எதிர்த் திசையில் இருக்கும்.

நியூட்டன் 1686-ல் இவ்விதிகளை வெளியிட்டார். அவ்விதிகள் நவீன வடிவத்தில் மேலே தரப்பட்டுள்ளன. அக்காலம் தொட்டு இவை இயக்க விசையியலின் அடிகோள்களாகத் (postulates) திகழ்கின்றன.

நியூட்டன் தன் ஆராய்ச்சிகளில் வகை நுண் கணிதத்தை வெகுவாகப் பயன்படுத்தினார். அவர் கெப்ளரின் கண்டுபிடிப்புகளிலிருந்து "ஈர்ப்பு விதி" என்று பெயர் பெற்ற விதியினை எப்படி உருவாக்கினார் என்பதை எளிய முறையில் அடியில் விளக்குவோம்.

கெப்ளரின் முதல் விதிப்படி, ஒரு கிரகமானது சூரியனைச்சுற்றி ஒரு தளப் பாதையில் செல்கிறது. ஆகவே அதன் மீது தாக்கும் விசைகளின் மொத்தம் (resultant) அந்தத் தளத்தில் இருக்க வேண்டும். P என்பது பாதையில் ஒரு புள்ளி, சூரியனை ஆதிப் புள்ளியாகக் கொண்டபோது (r,θ) அதன் ஆரைக் கோணக் கூறுகள் எனில், கிரகத்தின் பரப்பளவு வேகம் $\frac{1}{2}\, r^2 \frac{d\theta}{dt}$ என்று நாமறிவோம். இதனை $\frac{dA}{dt}$ என்று கொள்க. (கெப்ளரின் இரண்டாம் விதிப்படி பரப்பளவு வேகம் நிலையானது.)

$$\text{ஆகவே } \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\, h,$$

h ஒரு மாறிலி என்று கொள்க. $\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\, r^2 \frac{d\theta}{dt}$ என்பதால்,

$r^2 \frac{d\theta}{dt} = h$ ஒரு மாறிலி, F_r, F என்பன முறையே ஆரைத் திசையிலும், குறுக்குத் திசையிலும் கிரகத்தின் மீது தாக்கும் விசைகளின் மொத்தத்தின் கூறுகளெனில், நியூட்டனின் இரண்டாம் விதிப்படி $m \frac{1}{r} \frac{d}{dt}\left(r^2 \frac{d\theta}{dt}\right) = F_\theta$. ஆனால் $r^2 \frac{d\theta}{dt} = h$ ஒரு மாறிலி என்பதால், $F_\theta = 0$. அதாவது கிரகத்தின் மீதான விசைகளின் மொத்தம் ஆரைத் திசையிலேயே உள்ளது.

கெப்ளரின் முதல் விதிப்படி, கிரகத்தின் பாதை ஒரு நீள்வளையமாகும். நீள்வளையத்தின் பேரச்சு நீளம் $2a$, மையவகற்சி e எனில், அதன் சமன்பாடு $\frac{a(1-e^2)}{r} = 1 + e \cos\theta$ ஆகும். எனவே

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta} \quad \therefore \frac{dr}{dt} = -\frac{a(1-e^2)}{(1+e\cos\theta)^2}\,(-e \sin\theta).\frac{d\theta}{dt}.$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{r^2} = \frac{h(1+e\cos\theta)^2}{a^2(1-e^2)^2} \text{ என்பதால்}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{a(1-e^2)e\sin\theta}{(1+e\cos\theta)^2} \cdot \frac{h(1+e\cos\theta)^2}{a^2(1-e^2)^2} = e\sin\theta \frac{h}{a(1-e^2)}$$

$$\therefore \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{eh}{a(1-e^2)}\cos\theta\frac{d\theta}{dt} = \frac{eh\cos\theta}{a(1-e^2)}\frac{h}{r^2}$$

ஆகவே ஆரைவேக வளர்ச்சி வீதம்

$$= \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{eh\cos\theta}{a(1-e^2)} \cdot \frac{h}{r^2} - r \cdot \frac{h^2}{r^4}$$

$$= \frac{h^2}{r^2}\left[\frac{e\cos\theta}{a(1-e^2)} - \frac{1+e\cos\theta}{a(1-e^2)}\right] = -\frac{h^2}{a(1-e^2)} \cdot \frac{1}{r^2}$$

எனவே நியூட்டனின் இரண்டாம் விதிப்படி, கிரகத்தின்மீது தாக்கும் விசையானது, $\frac{1}{r^2}$ க்கு நேர் மாறல் கொண்டுள்ளது என்றும், இது சூரியனை நோக்கி அமைந்துள்ளதால், கவர்ச்சி வடிவில் உள்ளது என்றும் அறியலாம்.

ஒரு கிரகத்தின் நீள்வளையப் பாதையின் பரப்பு $\pi a \cdot a\sqrt{(1-e^2)}$ ஆகும். பரப்பளவு வேகம் $\frac{h}{2}$ என்பதால், இப்பாதையில், ஒரு சுற்று சுற்றிவர ஆகும் காலம் $T = \frac{\pi a^2\sqrt{1-e^2}}{\frac{1}{2}h} = \frac{2\pi a^2\sqrt{1-e^2}}{h}$ ஆகும்.

$\frac{2\pi}{T}$ என்ற எண்ணை n என்று குறித்தால், $\frac{2\pi}{n} = \frac{2\pi a^2\sqrt{1-e^2}}{h}$

$\therefore n = \frac{h}{a^2\sqrt{1-e^2}}$, ஆதாவது $n^2 a^3 = \frac{h^2}{a(1-e^2)}$. கெப்ளரின் மூன்றும் விதிப்படி, $\frac{a^3}{T^2}$ ஒரு மாறிலி எண், அதாவது $a^3 n^2$ ஒரு மாறிலி. இதனை μ என்று கொண்டால், கிரகத்தின் வேக வளர்ச்சி விதத்தின் அளவு $\frac{n^2 a^3}{r^2} = \frac{\mu}{r^2}$. எனவே நியூட்டனின் இரண்டாம் விதிப்படி, கவர்ச்சி $= \frac{m\mu}{r^2}$. இங்கு m என்பது கிரகத்தின் திணிவு.

ஆனல் நியூட்டனின் மூன்றும் விதிப்படி, இக்கவர்ச்சியானது கிரகத்தின் திணிவுக்கு நேர்மாறுவது போலவே, சூரியனின் திணிவுக்கும் நேர்மாறுவது அவசியம். எனவே பின்வரும் நியூட்டனின் **ஈர்ப்பு விதி** அறியப்பட்டது :

m_1, m_2 என்ற திணிவுகளைப் பெற்ற இரு துகள்களினிடையே ஏற்படும் ஈர்ப்பு விசையானது. m_1 க்கும், m_2 க்கும் நேர்மாறுகிறது; மேலும் அத்துகளினிடையேயுள்ள தூரத்தின் வர்க்கத்திற்கு எதிர் மாறுகிறது. r என்பது துகள்களிடைத் தூரம் எனில்

$$\text{ஈர்ப்புவிசை} = \frac{G m_1 m_2}{r^2}$$

இங்கு G என்பது சாசுவத மாறிலியாகும். சென்டிமீட்டர்—கிராம்—செகண்டு கணிப்பு முறையில் Gன் மதிப்பு $(6{\cdot}668 \pm {\cdot}005) \times 10^{-8}$. இதன் அளவை டைன். (சென்டிமீட்டர்)^2. (கிராம்)$^{-2}$ ஆகும். Gன் மதிப்பு பரிசோதனைகளின் மூலம் கணிக்கப்பெற்றது. இதன் நுணுக்கம் $\frac{1}{1300}$. வானியல் ஆராய்ச்சிகளுக்கு இந்த நுணுக்கம் போதாது. ஆகவே 1800-ல் கவுசு (Gauss) பின்பற்றிய கணிப்பு முறையே தற்போது பயன்படுத்தப்படுகிறது. இதனைப் பின்னர் விவரிப்போம்.

நியூட்டனின் ஈர்ப்பு விதியை, **சாசுவத ஈர்ப்பு விதி** (Universal law of gravitation) என்று குறிப்பிடுவது வழக்கம். இவ்விதியை நாம் பல இடங்களில் பயன்படுத்துகிறோம். இவ்விதியானது கெப்ளரின் விதிகளிலிருந்து பெறப்பட்டது. கெப்ளரின் விதிகள், சூரியனின் குடும்பத்தைப் பற்றியவையேயாதலால், இக்குடும்பத்தைச் சேராத பொருள்களுக்கும் இவ்விதிகள் பொருந்துமா என்று அறிதல் அவசியம். அப்பொருள்களுக்குக் கெப்ளரின் விதிகள் பொருந்துமாயின், நியூட்டனின் ஈர்ப்பு விதியும் பொருந்தும் என்பது வெளிப்படை. இத்தகைய குடும்பங்கள் பல உள்ளன. தோற்ற இணை விண்மீன்கள் (visual binaries) இதற்கு எடுத்துக் காட்டாகும். இவற்றுள் அதிக ஒளியுடன் காணப்படும் முதல் விண்மீனினை (primary star)ச் சுற்றி, துணை விண் மீனின் (companion) பாதையைக் கவனித்தோமானால், தோற்றப்பாதை (apparent orbit) ஒரு நீள் வளையம் என்று புலப்படுகிறது. ஆனால் முதல் விண் மீன் இப்பாதையின் குவியமாக இருப்பதில்லை. ஏனெனில், நாம் காண்பது மெய்ப்பாதை (true orbit) யல்ல; வானக் கோளத்தின் மேல் ஏற்படும் மெய்ப்பாதையின் வீழ்ச்சியையே நாம் பார்க்கிறோம். தோற்றப்பாதையில் கெப்ளரின் இரண்டாம் விதியும் மெய்யாகிறது. குத்து வீச்சில் பரப்பளவு விகிதங்கள் மாறுவதில்லை என்பதனால், மெய்ப்பாதையிலும் கெப்ளரின் இரண்டாம் விதி மெய்யாகிறது. [இவற்றினின்று, இணை விண்மீன்களிடையே ஈர்ப்பு விசை இருப்பதையும், அதன் அளவு, தலைகீழ்வர்க்க விதிப்படி (inverse square law) அமைகிறது என்பதையும் சரி பார்க்க முடிகிறது.]

2·5 இனி கெப்ளரின் இரண்டாம் விதியைச் சரிசெய்யுமாறு நீள் வளையப் பாதையில் ஒரு துகள் செல்லக் கூடுமானால், அதன் மீது எத்தகைய மைய விசை (central force) தாக்க வேண்டும் என்று பார்ப்போம். 2.3ல் கண்டபடி, இவ்விசை $R=\frac{kr}{(gx+fy+c)^3}$ ஆகவோ அல்லது $R=\frac{kr}{(lx^2+2\,mxy+ny^2)^{\frac{3}{2}}}$ ஆகவே இருக்க வேண்டும். மேலும், விசையானது காப்பு நிலைவிசை (conservative force) ஆக இருக்க வேண்டுமாயின், $gx+fy+c$ யும், $lx^2+2mxy+ny^2$ ம் r-ன் சார்பு (function)களாக இருத்தல் வேண்டும்; அதாவது (i) $g=0$, $f=0$; அல்லது (ii) $m=0$, $l=n$ ஆக இருத்தல் வேண்டும். $g=0$, $f=0$ எனில், $R=\frac{k}{c^3}r$. இவ்விதி பொருந்தாது. ஏனெனில், இவ்விதிப்படி நோக்கினால், இரு துகள்கள் அருகிலிருக்கும்போது குறைந்த விசையுடனும், வெகு தூரத்திலிருக்கும் போது அதிக விசையுடனும் ஒன்றையொன்று கவர வேண்டும். இது சரியாகத் தோன்றவில்லை. எனவே $R=\frac{Kr}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$ அதாவது $\frac{K}{r^2}$ என்பதே ஈர்ப்பு விதியாகக் கொள்ளக்கூடியது.

நியூட்டனின் சாசுவத ஈர்ப்பு விதியானது, கெப்ளரின் மூன்று விதிகளையும் கொண்டு நியூட்டனால் தருவிக்கப்பட்டது. இவற்றில் கெப்ளரின் மூன்றும் விதி தோராயமான விதியேயாகும். இவ்விதி யைக் கெப்ளர் அறிந்தது, டைக்கோ பிராகியின் காட்சிப் பதிவுகள் மூலமே. இக்காட்சிப் பதிவுகள் பார்வைப் பிழைக்குட்பட்டவை. இப்பிழைகளின் அளவு, மிக அதிகமாகவும் இல்லாமல், மிகக் குறை வாகவும் இல்லாமல் அமைந்தது வியக்கத் தக்கதே. அதிகப் பிழைகள் கொண்டிருந்தாலும், மிகக் குறைந்திருந்தாலும் அத்தகைய விவரங்களிலிருந்து கெப்ளரின் விதிகள் பிறந்திருக்காது. அதனால், பெர்ட்ராண்சு ரச்சல் கூறியது போல, சாசுவத ஈர்ப்பு விதியின் கண்டுபிடிப்பு வெகுகாலம் தாமதித்து நேர்ந்திருக்கும்.

2.6 நிலைமைத் திணிவும், ஈர்ப்புத் திணிவும்

நியூட்டனின் இரண்டாம் விதியில் வரும் திணிவு நிலைமத் திணிவு எனப்படும். நியூட்டனில் சாசுவத ஈர்ப்பு விதியில் வரும் திணிவு ஈர்ப்புத் திணிவு எனப்படும். கெப்ளரின் விதிகள் மூலம் இவ்விரண்டு திணிவுகளும் ஒன்றே என்று அறிகிறோம். கெப்ளரின் விதிகள் காட்சிப் பதிவுகளிலிருந்து கிடைக்கப் பெற்றவை; அவற்றில் நுண்ணிய பிழைகள் இருக்கலாம். ஆகவே ஒரு பொருளின் நிலைமத் திணிவும், ஈர்ப்புத் திணிவும் ஒன்றே என்று எவ்வாறு திட்டமாக

அறிவது? நியூட்டன் இதற்காகப் பல பரிசோதனைகளை நடத்தினர். ஒரே நீளமும், வெளி அமைப்பும் கொண்ட வெவ்வேறு குண்டுகளில், கோதுமை, தங்கம், தண்ணீர், உப்பு போன்ற பொருள்களை அடைத்து ஊசலிகள் செய்து, அவற்றின் அலைவு நேரத்தைக் கணக்கிட்டு, மூன்று தசம இடங்களுக்குத் திருத்தமாக இவ்விருவிதத் திணிவுகளின் விகிதம் 1 : 1 என்று காட்டினர். சமீப காலத்தில் இந்த அளவுகளின் நுட்பம் 10^{-9} ஆக உயர்ந்திருக்கிறது.

2·7 விசைத் தேக்கம் (Force Potential)

முப்பரிமாண வெளியில் விசையொன்று பொருள்களின் மீது ஏற்படுவதாகக் கோள்வோம். இந்த விசையின் அளவும், அதன் திசையும் புள்ளிக்குப் புள்ளி மாறி வரலாம். இந்த அமைப்பை விசை வெளி என்போம். அத்தகைய வெளியில் (x, y, z) என்ற புள்ளியில் ஒரு துகளை வைப்போம்; இதன் திணிவு ஒரு அலகு என்று கொள்க. இதன் மீது ஏற்படும் விசையின் கூறுகள், முறையே $x-, y-, z-$ அச்சுத் திசைகளில் X, Y, Z என்க. X, Y, Z ஒவ்வொன்றும் x, y, z ஆகிய மாறிகளிலாகிய சார்பலன்களாக இருக்கும். V என்ற சார்பு ஒன்று,

$$-\frac{\partial V}{\partial x} = X, -\frac{\partial V}{\partial y} = Y, -\frac{\partial V}{\partial z} = Z$$ என்னும் சமன்பாடுகளுக்கு இணங்க இருக்குமாயின், Vயினை, இவ்விசைவெளியின் **விசைத் தேக்கம்** என்போம்.

$P_1 (x_1, y_1, z_1)$ என்ற புள்ளியில் m_1 அலகு திணிவு கொண்ட ஒரு துகளை வைப்போம். இத்துகள், மற்ற புள்ளிகளில் வைக்கப் படும் ஒவ்வொரு துகளையும் நியூட்டனின் விதிப்படி கவர்கிறது. $P (x, y, z)$ என்ற புள்ளியில் ஒரு அலகு திணிவு கொண்டுள்ள துகள் ஒன்று வைக்கப்பட்டால், அதன் மீது m_1ன் கவர் விசை $\frac{Gm_1}{PP_1^2}$.

PP_1ன் திசைக் கொசைன்கள் $\frac{x-x_1}{PP_1}, \frac{y-y_1}{PP_1}, \frac{z-z_1}{PP_1}$ என்பதால், அச்சுகளின் பாசிடிவ் திசைகளில் இக்கவர் விசையின் கூறுகள்

$$-\frac{Gm_1 (x-x_1)}{PP_1^3}, -\frac{Gm_1(y-y_1)}{PP_1^3}, -\frac{Gm_1 (z-z_1)}{PP_1^3},$$

$PP_1^2 = (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2$ என்பதால், $-V = \frac{Gm_1}{PP_1}$ என்று கொண்டால், $-\frac{Gm_1(x-x_1)}{PP_1^3} = -\frac{\partial V}{\partial x}, -\frac{Gm_1(y-y_1)}{PP_1^3} = -\frac{\partial V}{\partial y},$

$-\frac{Gm_1(z-z_1)}{PP_1^3} = -\frac{\partial V}{\partial z}$ என்பது தெளிவு. எனவே $-\frac{Gm_1}{PP_1}$ தான் இக்கவர் விசையின் தேக்கம் என்று அறிகிறோம்.

$P_1\ (x_1, y_1, z_1)$, $P_2\ (x_2, y_2, z_2), \ldots\ldots P_n\ (x_n, y_n, z_n)$ என்ற n புள்ளிகளில் முறையே $m_1, m_2, \ldots\ldots m_n$ அலகுகள் திணிவுள்ள துகள்களை வைத்திருந்தால், $P(x, y, z)$ என்ற புள்ளியில் இவற்றின் மொத்தத் தேக்கம் $V = -G\left(\frac{m_1}{PP_1} + \frac{m_2}{PP_2} + \cdots \frac{m_n}{PP_n}\right) = -G\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i}{r_i}$.

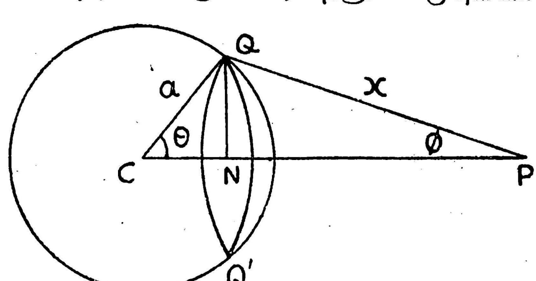
இங்கு $PP_i = r_i$ என்று கொண்டுள்ளோம். தனித்த துகள்கள் அல்லாமல், ஒரு கனப் பொருளானது கவர் விசையைச் செலுத்துகிறது என்று கொண்டால், அதன் விசைத் தேக்கம் $= -G\int\frac{dm}{r}$ ஆகும்.

$$-\frac{\partial V}{\partial x} = -\Sigma\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{Gm_i}{r_i}\right) = -\Sigma\frac{Gm_i}{r_i^3}\quad(x-x_i)\quad \text{என்பதால்.}$$

$-\frac{\partial V}{\partial x}$ ஆனது (x, y, z) எனும் புள்ளியில் இத்துகள்கள் செலுத்தும் கவர் விசையின் $x-$கூறு என்று அறிகிறோம். இவ்வாறே $-\frac{\partial V}{\partial y}, -\frac{\partial V}{\partial z}$ ஆகியவை y, z திசைகளில் இக்கவர் விசையின் கூறுகளாம்.

2·8 உள்ளீடற்ற கோளத்தின் ஈர்ப்பு விசை

(*i*) P என்பது கோளத்தின் வெளியேயுள்ள ஒரு புள்ளி Q என்பது கோளத்தின் மேலுள்ள ஏதேனுமொரு புள்ளி. C ஆனது



படம் 2.3

கோளத்தின் மையம், a அதன் ஆரம் என்க. படத்தில் $QN \perp CP$, $\angle QCN = \theta$, $\angle QPN = \phi$, $CP = r$, $PQ = x$.

Qல் வைக்கப்பட்டுள்ள ஒரு அலகுத் திணிவுள்ள துகளுக்கு Pல் ஏற்படும் கவர் விசை $\frac{G}{PQ^2}$ ஆகும். இதனை CPன் திசையில் கூறு படுத்த, கிடைப்பது $-\frac{G}{PQ^2}\cos\phi$. Pலிருந்து PQ அளவு தூரத்திலுள்ள கோளப் புள்ளிகள் QQ' என்ற வட்டத்தில் இருக்கும். இதன் மையம் N, ஆரம் QN. எனவே, கோளத்தை இத்தகைய இணையான வட்டங்களாக வெட்டிப் பிரிக்க, QQ' வட்டத்தின் கவர் விசைக்கூறு CPன் திசையில் $-G\frac{2\pi \cdot NQ \cdot ad\theta\rho}{PQ^3}\cos\phi$. மேலும் சமச்சீரைக் கருதிப் பார்க்குமிடத்து விளைவு விசை CPன் திசையிலேயே இருப்பது தெரிய வரும்.

$$\text{ஆகவே விளைவு விசை} = -G\int_0^{\pi}\frac{2\pi\cdot a\sin\theta\cdot ad\theta\rho}{x^2}\cdot\cos\phi$$

$x^2=a^2+r^2-2ar\cos\theta$ என்பதால், $xdx = ar\sin\theta\, d\theta$, மேலும்

$$\cos\phi=\frac{r^2+x^2-a^2}{2rx}.$$

$$\text{எனவே விளைவு விசை} = -G\int_{r-a}^{r+a}\frac{2\pi a\frac{xdx}{r}\rho}{x^2}\left(\frac{r^2+x^2-a^2}{2rx}\right)$$

$$= -\frac{G\pi a\rho}{r^2}\left\{(r^2-a^2)\left(-\frac{1}{x}+x\right)\right\}_{r-a}^{r+a}$$

$$= -\frac{G\pi a\rho}{r^2}\left\{(r^2-a^2)\left(\frac{1}{r-a}-\frac{1}{r+a}\right)+2a\right\}$$

$$= -G\frac{\pi a\rho}{r^2}\left[(r^2-a^2)\cdot\frac{2a}{r^2-a^2}+2a\right]=-G\frac{4\pi a^2\rho}{r^2}$$

கோள ஓட்டின் (shell) மொத்த திணிவு M எனில், $M=4\pi a^2\rho$. எனவே அதன் விளைவு விசை $=-\frac{GM}{r^2}$. இது Pலிருந்து Cன் திசையில் ஏற்படுகிறது என்பதை நெகடிவ் குறி காட்டுகிறது. கோள ஓட்டின் மொத்தத் திணிவு Mக்குச் சமமான திணிவுள்ள ஒரு துகளை, கோளத்தின் மையத்தில் நிறுத்தினால், இத்துகளுக்கு Pல் கவர் விசை $\frac{GM}{r^2}$ ஆக இருக்கும்.

இப்போது ஒரு கன கோளத்தை எடுத்துக் கொள்வோம். P என்பது ஒரு வெளிப்புள்ளி என்க. கன கோளத்தை, கோள

ஓடுகளின் அடுக்காகக் கருதலாம். ஒவ்வொரு ஓட்டின் மையம் Cயும் ஒன்றேயாதலால், இவ்வோடுகளின் விளைவு விசை CPன் திசையில் இருக்கும். மேலும் விளைவு விசை

$$= \frac{G\,(\text{கோள ஓடுகளின் மொத்தத் திணிவு})}{r^2}$$

$$= \frac{G\cdot\,(\text{கன கோளத்தின் திணிவு})}{r^2}$$

எனவே, ஒரு கன கோளமானது, அதன் வெளியேயுள்ள ஒரு புள்ளியில் செலுத்தும் கவர் விசையானது, அக்கோளத்தின் திணிவுக்குச் சமமான திணிவுள்ள துகளொன்றை அதன் மையத்தில் நிறுத்தினுல் அத்துகள் அப்புள்ளியில் செலுத்தும் கவர் விசைக்குச் சமம்.

மேற்கூறிய நிரூபணத்தில், எல்லா ஓடுகளின் அடர்த்தியும் சமமானதாக இருக்கத் தேவையில்லை என்பதைக் கவனிக்க; ஒவ்வொரு ஓட்டின் அடர்த்தி மட்டும் நிலையானதாக இருந்தால் போதுமானது. எனவே, வெளிப்புள்ளியொன்றின் மீது ஒரு கன கோளத்தின் கவர் விசை, அது ஒரே சீரான அடர்த்தியுள்ள தாயிருந்தாலும், அல்லது அடர்த்தியானது ஓட்டுக்கு ஓடு மாறு பட்டிருந்தாலும், தலைகீழ் வர்க்க விதியை மேற்கொள்ளும் என்றறிகிறேம்.

அடுத்து, ஒரு கோளத்தின் விசைத்தேக்கத்தைக் காண முற்படுவோம். முதலில் உள்ளீடற்ற கோள ஓட்டினை எடுத்துக் கொள்வோம். Q எனும் புள்ளியில் வைக்கப்பட்ட அலகுத்துகளின் விசைத் தேக்கம் Pல் $-\dfrac{G}{PQ}$ என்று நாமறிவோம். எனவே QQ' வட்டத்தின் மீதுள்ள புள்ளிகளின் மொத்த விசைத் தேக்கம் $-\dfrac{G\,2\pi\cdot NQ\,ad\theta\cdot}{PQ}\rho$. முன்போலவே கோள ஓட்டினை இத்தகைய வட்ட வளையங்களாகப் பிரித்துள்ளதாகக் கருதினுல், மொத்த விசைத் தேக்கம்

$$= -\int_0^{\pi} \frac{G.2\,\pi.\,a\sin\theta.\,a\,d\,\theta\,\rho}{x}$$

$$= -\int_{r-a}^{r+a} \frac{G.\,2\,\pi\,a.\,\dfrac{x\,dx}{r}.\,\rho}{x}$$

$$= -G.\,\frac{2\,\pi\,a\,\rho.}{r}\,2\,a = -\,G.\,\frac{4\,\pi\,a^2\,\rho}{r}.$$

எனவே கோள ஓட்டின் மொத்தத் திணிவுக்குச் சமான திணிவுள்ள துகளை கோள மையத்தில் நிறுத்தினுல், கோளத்தின் வெளிப்புள்ளியில் இதன் விசைத் தேக்கமும், கோள ஓட்டின் விசைத் தேக்கமும் சமம்.

ஒரு கன கோளத்தினைப் பல பொதுமையக் கோள ஓடுகளின் தொகுப்பாகக் கருதுக. வெளிப்புள்ளி யொன்றில் ஒரு கன கோளத்தின் விசைத் தேக்கம்

$$= - G. \frac{(\text{கோள ஓடுகளின் மொத்தத் திணிவு})}{r}$$

$$= - \frac{(G \text{ கன கோளத்தின் திணிவு})}{r}$$

P ஆனது கோள ஓட்டின் உட்புறம் இருந்தால், Pல் கோள ஓட்டின் விசைத் தேக்கம்

$$= -\int_{a-r}^{a+r} \frac{G. 2\pi a. \frac{x\, dx}{r} \rho}{x}$$

$$= -G. 2 \frac{\pi a \rho}{r} 2r = -G. 4\pi \rho a$$

அதாவது கோள ஓட்டின் எந்த ஒரு புள்ளியிலும் அவ்வோட்டின் விசைத்தேக்கம் நிலையானதாக இருக்கும். விசைத் தேக்கத்தின் பகுதிவகைக் கெழுக்களே விசையின் கூறுகளாதலால், ஒரு கோள ஓட்டின் விளைவுகவர்விசை, அதன் உட்புறப் புள்ளிகளில் பூச்சியம் ஆகும்.

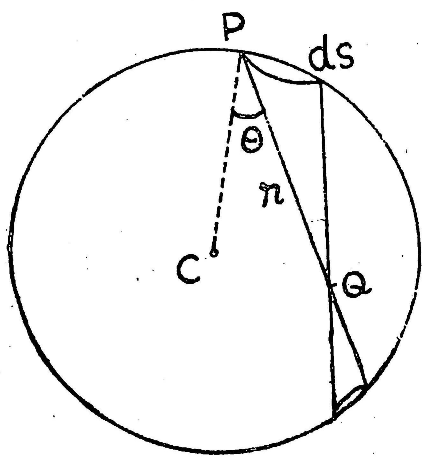
ஒரு கன கோளத்தின் உட்புறத்தில் P என்பது ஒரு புள்ளி என்க. கன கோளத்தைக் கோள ஓடுகளாகப் பிரிக்க. P ஆனது சில ஓடுகளுக்கு உட்புறமிருக்கும். அத்தகைய ஓடுகளின் விளைவு விசை Pல் பூச்சியமாகும். ஏனைய ஓடுகளுக்கு P வெளிப்புற மிருப்பதால், Pல் அவற்றின் மொத்த விளைவு விசை $= -G. \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 . \rho}{r^2}$ $= -G. \frac{4}{3}\pi \rho r$. எனவே P என்பது உள்புள்ளியானுல், Pல் கன கோளத்தின் கவர்விசை நேர்தூர விதி (law of direct distance) யை மேற்கொள்கிறது.

இதுவரை நாம் கண்ட பொருள்களை அடியில் அட்டவணைப் படுத்திக் காட்டியிருக்கிறேம்.

	கோள ஓடு		கன கோளம்	
	உள்புள்ளி	வெளிப்புள்ளி	உள்புள்ளி	வெளிப்புள்ளி
விசைத் தேக்கம்	$-G.4\pi\rho a$	$-G.\frac{4\pi a^2\rho}{r}$	$G.\frac{2}{3}\pi\rho r^2+c$	$G\frac{\frac{4}{3}\pi a^3\rho}{r}$
விளைவு விசை	0	$G.\frac{4\pi a^2\rho}{r^2}$	$G.\frac{4}{3}\pi\rho r$	$G.\frac{\frac{4}{3}\pi a^3\rho}{r^2}$

கோள வடிவிலுள்ள பொருள்களின் கவர்விசை, விசைத் தேக்கம் ஆகியவைகளை, கவுசு தேற்றத்தைக் கொண்டு எளிதில் தருவிக்கலாம். விசைத் தேக்கங்களைப் பற்றிய கவுசுத் தேற்றமாவது: S என்பது ஒரு மூடிய வளைபரப்பு, V அதனால் உண்டாக்கப்பட்ட பருமம் (volume) என்க. துகள்களின் விளைவு, கவர் விசைகளின் செங்கோட்டுக் கூறுகளின் Sன் மீதான தொகையானது, Sக்கு உட்புறம் இருக்கும் துகள்களின் மொத்தத் திணிவைப்போல் $4\pi G$ பங்குக்குச் சமம்.

$$\iint_S g_n\, dS = 4\pi G(\Sigma m)_v.$$



படம் 2·4

நிரூபணம் :—

Q என்னும் உட்புறப்புள்ளியில் திணிவு m கொண்ட ஒரு துகளை வைக்க. P என்பது Sன் ஏதேனும் ஒரு புள்ளி என்க. mன் கவர்விசை Pல் $\frac{Gm}{QP^2} = \frac{Gm}{r^2}$. இக்கவர் விசையின் செங்கோட்டுக் கூறு

$= \frac{G\,m\,\cos\theta}{r^2}$. Pல் Sன் ஒரு சிறு பாகம் $d\,S$ என்க. $d\,S$ன் மீது m ன் கவர்விசையின் செங்கோட்டுக் கூறு.

$$g_n = \frac{Gm\,\cos\theta\,ds}{r^2}$$

dw என்பது dSனுல் Qல் தாங்கப்பட்ட கன கோணம் எனில் இது $Gm\,dw$ வுக்குச் சமமாகும். எனவே இத்தகைய கூறுகளின் தொகை

$$= \iint_S g_n dS = \iint_S Gm\,dw = Gm \,.\, 4\pi.$$

Q என்பது Sக்குள் ஏதேனுமொரு புள்ளியென்பதால், m ஆனது Sக்குள் எங்கிருந்தாலும் $\iint_S g_n\,dS = 4\,\pi\,Gm$. இப்போது $m_1, m_2 \ldots m_n$ என்பவை Sக்குள்ளிருக்கும் வெவ்வேறு ஈர்க்கும் துகள் திணிவு களெனில், இவையனைத்தின் கவர்விசைகளின் செங்கோட்டுக் கூறு களின் Sன் மீதான தொகையானது

$$\iint_S g_n\,dS = 4\pi\,G \sum_{i=1}^{n} m_i$$

அடுத்தபடியாக, Q' என்பது Sக்கு வெளியிலுள்ள புள்ளி. அங்கு m' எனும் ஒரு துகள் திணிவு வைக்கப்பட்டிருக்கிறது என்க. dSன் மீது இதன் கவர் விசையின் செங்கோட்டுக் கூறு முன் போலவே $Gm'dw$. ஆனுல் Sன் மீதான தொகை $= \iint Gm'dw = 0$. ஏனெனில் Q', Sக்கு வெளியிலுள்ள புள்ளி.

எனவே ஈர்க்கும் திணிவுகள் எங்கிருந்தாலும், Sன் மீதான அவற்றின் கவர்விசைகளின் செங்கோட்டுக் கூறுகளின் தொகை $= 4\pi G\,(\Sigma m)_v$ ஆகும்.

இப்போது K என்பது ஒரே சீரான அடர்த்தியுள்ள கன கோள மாகவோ, அல்லது அடர்த்தியானது மையப்புள்ளியிலிருந்து உள்ள தூரத்திற்கேற்ப மாறுபடும் கன கோளமாகவோ இருக்கட்டும். இதன் திணிவு M என்க. S என்பது இதே மையத்தைக் கொண்ட, Kயை உள்ளடக்கிய ஒரு கோள ஓடு என்க. Sன் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் Kன் கவர் விசை சமமாக இருக்கும். மேலும் இவ்விசை ஆரத் திசையில் இருக்கும். எனவே $\iint_S g_n\,dS = \iint_S g dS = g \,.\, 4\,\pi\,r^2$.

ஆனுல் இத்தொகை $= 4\pi\,G.\,M.$ எனவே $g.\ 4\pi\,r^2 = 4\,\pi\,GM.$ அதாவது $g = \frac{GM}{r^2}$.

விசைத் தேக்கத்திற்கும் நிலைச் சக்திக்கும் ஒரு தொடர்பு உள்ளது. கவர்விசைவெளியில் ஒரு அலகுத் துகளானது தற்போதைய நிலையிலிருந்து கந்தழிக்குச் செல்லுகையில் அது செய்யும் வேலையே, அதன் தற்போதைய நிலைச் சக்தியாகும். ஆகவே நிலைச்சக்தி

$$= \int_{r}^{\infty} \left(- \frac{Gm}{r^2} \right) dr = - \frac{GM}{r}.$$

இதுவே விசைத்தேக்கம் என்பதைக் கவனிக்க.

வானத்தில் கோள்களும் விண்மீன்களும் பொதுவில் கோள வடிவில் இருப்பதனால், இவற்றின் ஈர்ப்பு சக்திகள், அவைகளைப் புள்ளிகளாகக் கருதினால் எவ்வளவு இருக்குமோ அவ்வளவு அளவே கொண்டுள்ளன என்பது இதிலிருந்து தெரிகிறது.

விண்மீன்களுக்கு இடையே ஒரு எரிமீன் செல்வதானது, ஒரு கோளத்தினுள் ஒரு துகள் நகருவதைப் போன்றது.

மேலே கொடுத்துள்ள ஈர்ப்பு விதிகள் கோளவடிவிலுள்ள பொருள்களுக்கே பொருந்தும். மேலும் இவற்றின் அடர்த்தியும் ஒரே சீரானதாகவோ, அல்லது மையத்திலிருந்தான தூரத்தைப் பொறுத்து மட்டுமே மாறுபவையாகவோ இருத்தல் வேண்டும். அப்படியில்லாவிடில், ஈர்ப்பு விசைகளில் மாறுதல்கள் ஏற்படும். இவற்றைப் பற்றி நான்காம் அத்தியாயத்தில் ஆராய்வோம்.

பயிற்சி 2

1. ஒரு கன கோளத்தின் அடர்த்தி, அதன் பரப்பிலிருந்து காணப்படும் ஆழத்துடன் நேர்மாறுகிறது என்க. அக்கோளத்தின் உட்புள்ளியொன்றில் அதன் கவர்விசை மீப்பெரு மதிப்பை எங்கு அடைகிறது என்று காண்க. இதன் மதிப்புக்கும், கோளத்தின் வெளிப்பரப்பின் மேலுள்ள விசை அளவுக்குமுள்ள விகிதத்தைக் காண்க.

2. ஒரு கன கோளத்தின் அடர்த்தி μr^n எனில், அதன் விசைத் தேக்கத்தை (i) உட்புள்ளியிலும் (ii) வெளிப் புள்ளியிலும் காண்க.

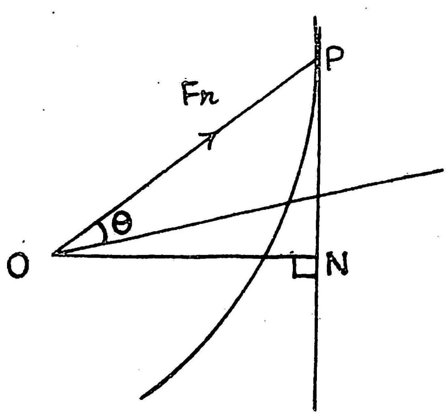
3. மைய விசை இயக்கம்

3·1 திணிவு m கொண்ட ஒரு துகளின் மீது, எப்போதும் O எனும் நிலையான புள்ளி வழியே செல்லும் ஒரு விசை தாக்குகிறது என்க. இத்தகைய விசையை மைய விசை (central force) என்போம். O விசை மையம். நியூட்டனின் இரண்டாம் விதிப்படி இத்துகளின் இயக்கச் சமன்பாடுகளை எழுதலாம். கோண தூரக் கூறுகளில் இச் சமன்பாடுகள்,

$$m\left\{\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right\}=F_r, \tag{1}$$

$$m\,\frac{1}{r}\,\frac{d}{dt}\left(r^2\,\frac{d\theta}{dt}\right)=0 \tag{2}$$

ஆகும்.



படம் 3.1

(2)ம் சமன்பாட்டிலிருந்து $r^2\dfrac{d\theta}{dt}$ என்பது நிலையானஎண் என்று அறிகிறோம்.

$$r^2\,\frac{d\theta}{dt}=h \tag{3}$$

என்க. $u=\frac{1}{r}$ எனில் $\frac{d\theta}{dt}=hu^2$, மேலும் $r=\frac{1}{u}$ என்பதால்

$$\frac{dr}{dt}=-\frac{1}{u^2}\frac{du}{dt}=-\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}=-\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta}hu^2=-h\frac{du}{d\theta}$$

$$\therefore \quad \frac{d^2r}{dt^2}=-h\frac{d^2u}{d\theta^2}\frac{d\theta}{dt}=-h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2}$$

இவற்றை (1)ல் பிரதியிட, $m\left\{-h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2}-ru^4h^2\right\}=Fr$

அதாவது $$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u=-\frac{F_r}{mh^2u^2} \tag{4}$$

என்ற சமன்பாட்டைப் பெறுகிறோம். F_rஐ r-ன் சார்பாக அறிந்திருந்தால், (4)ம் சமன்பாடு, அத்துகளின் பாதையின் வகைக் கெழு சமன்பாடாக அமைகிறது. இதனைத் தீர்த்து, பாதையின் வடிவை அறியலாம்.

$r^2\frac{d\theta}{dt}=h$ என்பதிலிருந்து, இரண்டாம் அத்தியாயத்தில் (2·4) விவரித்தபடி, பரப்பளவு வேகம் நிலையானது என்று அறிகிறோம். மேலும், முதல் அத்தியாயத்தில் (1·4) கூறியபடி, சுழல் உந்த அளவு $mr^2\frac{d\theta}{dt}$ என்பதனுல், இத்துகளின் சுழல் உந்த அளவு ஒரு மாறிலி என்று அறிகிறோம். சுழல் உந்த அளவு $m.v.ON$ என்பதால், துகளின் வேகம் ONக்குத் தலைகீழ் விகிதத்தில் மாறுகிறது என்பதும் தெளிவு.

அடுத்தபடியாக, சக்தித் தொகை (Integral of energy)யினைக் காண்போம்.

$$v^2=\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=h^2\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2+r^2h^2u^4=h^2\left\{\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2+u^2\right\}$$

எனவே $$2v\frac{dv}{dr}=h^2\left\{2\frac{du}{d\theta}\frac{d^2u}{d\theta^2}\frac{d\theta}{dr}+2u\frac{du}{dr}\right\}$$

$$=-2h^2u^2\left\{\frac{d^2u}{d\theta^2}+u\right\}$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dr}\left(\tfrac{1}{2}mv^2\right)=-h^2m\left(u+\frac{d^2u}{d\theta^2}\right)u^2$$

$$=F_r \qquad \text{(4-லிலிருந்து).}$$

எனவே $$\tfrac{1}{2}mv^2=\int F_r\,dr+E \tag{5}$$

F_r என்பது rன் சார்பு என்பதால், $\int F_r\, dr = -V(r)$ என்று இருக்குமாறு V எனும் ஒரு சார்பினைக் காண முடியும். $V(r)$ என்பது நிலைச் சக்தி (Potential Energy). இதுவே விசைத் தேக்கமும் (Potential) ஆகும். (5)ம் சமன்பாட்டை $\frac{1}{2} mv^2 + V(r) = E$ என்று எழுதலாம். இதிலிருந்து நாம் அறிவதாவது :

"துகளொன்று மைய விசையினால் இயங்குகையில், அதன் இயக்க சக்தி, நிலைச் சக்தி ஆகியவற்றின் கூடுதல் ஒரு மாறிலி."

இதனை மொத்தச் சக்தி (Total energy) என்று குறிப்பிடுவோம்.

3·2 ஒரு பொருள் இயக்கம் (One body Problem)

O என்பது நிலையான புள்ளி. இங்கு M எனும் திணிவு கொண்ட ஒரு துகள் நிலைத்திருக்கிறது. திணிவு m கொண்ட மற்றொரு துகள், Mன் ஈர்ப்பு விசைக்குட்பட்டு இயங்குகிறது. mன் மீது Mன் ஈர்ப்பு விசை, Mஐ நோக்கி $\frac{GMm}{r^2}$ அளவு கொண்டிருக்கும். எனவே (1)ம் சமன்பாட்டில் $F_r = -\frac{GMm}{r^2}$. மேலும் GMஐ μ என்று எழுதினால், $F = -\frac{m\mu}{r^2}$. சமன்பாடு (4)லிலிருந்து, mன் பாதையை

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{\mu}{h^2} \tag{6}$$

என்ற சமன்பாடு தருகிறது. இதனைத் தீர்த்தால்,

$$u = c \cos(\theta - \varepsilon) + \frac{\mu}{h^2}.$$

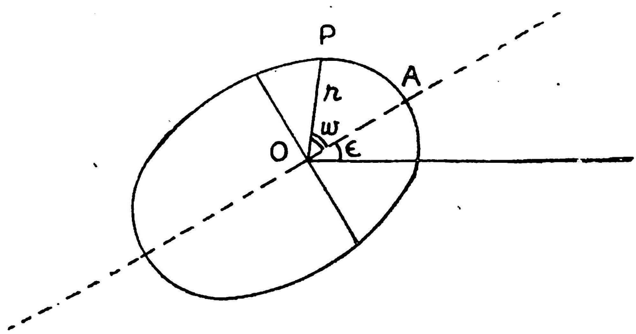
இங்கு c, ε என்பவை தொகையீட்டு நிலையெண்கள். $r = \frac{1}{u}$ என்பதனால், $e = \frac{ch^2}{\mu}$ என்று கொண்டால்

$$r = \frac{h^2/\mu}{1 + e\cos(\theta - \varepsilon)} \tag{7}$$

இது ஒரு இருபடிவளைவின் சமன்பாடு. இதன் குவியம் O ; செவ்வகலம் $\frac{h^2}{\mu}$; மையவகற்சி எண் ε.

இருபடி வளைவின் நெட்டச்சு, முதலச்சுடன் (initial line) ε கோண அளவில் சாய்ந்துள்ளது. Oவிலிருந்து பாதையின் அண்மைப்புள்ளி (pericentre)யின் தூரம், (7)ல் θக்குப் பதில் ε

என்றிட்டு பெறப்படும். இத்தூரம் $\frac{h^2}{\mu(1+e)}$ ஆகும். $(\theta-\varepsilon)$ ஐ w என்று எழுதுவது வழக்கம். w ஐ இயல்பு நெறிப் பிறழ்ச்சி (true anomaly) என்றழைப்போம்.



படம் 3.2

சமன்பாடு (7) தரும் பாதை நீள்வளையமாகவோ, பரவளைவாகவோ, அதிபரவளைவாகவோ இருக்கலாம். இதற்கு முறையே (*i*) $e<1$, (*ii*) $e=1$ (*iii*) $e>1$ ஆக இருக்க வேண்டும். $e=\frac{ch^2}{\mu}$ என்பதால், பாதையின் வகையானது, தொகையீட்டு நிலையெண்ணை c, மேலும் கொடுத்துள்ள நிலையெண்கள் h, μ ஆகியவற்றைப் பொறுத்துள்ளது.

$F_r=-\frac{m\mu}{r^2}$ என்பதை (5)ல் பிரதியிட, கிடைப்பது

$$\tfrac{1}{2}\, m v^2-\frac{m\mu}{r}=E \qquad (8)$$

அதாவது, $\frac{1}{2} mh^2\left\{\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2+u^2\right\}-\frac{m\mu}{r}=E$

u ஆனது மீப்பெரு அல்லது மீச்சிறு மதிப்பை மேற்கொள்ளும்போது $\frac{du}{d\theta}=0$. அப்போது $u^2-2\frac{\mu u}{h^2}-\frac{2E}{mh^2}=0$.

$$\therefore u=\frac{\mu}{h^2}\left\{1\pm\sqrt{1+\frac{2h^2}{m\mu^2}E}\right\}$$

ஆனால் (7)ம் சமன்பாட்டிலிருந்து $u=\mu\frac{\{1+e\cos(\theta-\varepsilon)\}}{h^2}$. எனவே

இதன் மீப்பெரு, மீச்சிறு மதிப்புகள் $\frac{\mu}{h^2}(1\pm e)$.

$$\text{எனவே } e = \sqrt{1+\frac{2h^2}{m\mu^2}E} \tag{9}$$

என்றறிகிறோம்.

(*i*) $e=1$ என்க. இப்போது $E=0$. பாதை ஒரு பரவளைவு. அண்மைத் தூரம் (pericentric distance) q எனில், $\frac{h^2}{\mu}=2q$.

எனவே பரவளைவின் சமன்பாடு $r=\dfrac{2q}{1+\cos(\theta-\varepsilon)}$

பரவளைவுப் பாதையின் பொதுப்புள்ளியில் வேகம் v எனில், (8)ம் சமன்பாட்டிலிருந்து

$$\tfrac{1}{2}mv^2-\frac{m\mu}{r}=0.$$

எனவே $v^2=\dfrac{2\mu}{r}$, அதாவது $v=\sqrt{\dfrac{2\mu}{r}}$.

தலைகீழ் வர்க்க விதிப்படி ஈர்க்கப்படும் ஒரு துகள், முதலில் கந்தழியில் அசைவற்றிருந்தால், விசைமையத்திலிருந்து r தூரத்திற்கு அது வரும்போது வேகம் $\sqrt{\dfrac{2\mu}{r}}$ ஆக இருக்குமல்லவா ? மறுதலையாக, r தூரத்தில் $\sqrt{\dfrac{2\mu}{r}}$ அளவு வேகத்தில் நகரும் துகள், தலைகீழ் வர்க்க விசை வெளியில் கந்தழிக்குச் சென்று நிலைத்துவிடும். ஆகவே இந்த வேகத்தைத் தப்பிச் செல்லும் வேகம் (Escape velocity) என்கிறோம்.

(*ii*) $e<1$ என்க. இப்போது $E<0$. பாதை ஒரு நீள் வளையம். ஆதிப்புள்ளியிலிருந்து துகளின் மீப்பெரு தூரம் q', மீச்சிறு தூரம் q என்க. நெட்டச்சின் நீளம் $2a$ எனில்,

$$q=\frac{h^2}{\mu(1+e)},\quad q'=\frac{h^2}{\mu(1-e)},\quad q+q'=2a$$

எனவே $h^2=\mu a(1-e^2)$, இதனால் பாதையின் சமன்பாட்டை

$$r=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos w}$$

என்று எழுதலாம். மேலும், $h^2=\mu a(1-e^2)$ என்று (9)ல் பிரதியிட, $e^2=1+\dfrac{2\mu a(1-e^2)}{\mu^2}E$, அதாவது $E=-\dfrac{m\mu}{2a}$. இதனை

(8)ல் பிரதியிட, $\tfrac{1}{2}mv^2-\dfrac{m\mu}{r}=-\dfrac{m\mu}{2a}$; அதாவது $v^2=\mu\left(\dfrac{2}{r}-\dfrac{1}{a}\right)$

நீள்வளையப் பாதையை ஒரு முறை சுற்றுவதற்காகும் காலத்தை இப்போது எளிதில் கணக்கிடலாம். T என்பது இதற்கான காலம் எனில்,

$$T = \frac{\text{பாதையின் மொத்தப் பரப்பு}}{\text{பரப்பளவு வேகம்}}$$

$$= \frac{\pi a^2\sqrt{1-e^2}}{\frac{1}{2}h} = \frac{\pi a^2\sqrt{1-e^2}}{\frac{1}{2}\sqrt{\mu a(1-e^2)}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}a^{\frac{3}{2}}$$

இதனின்று கெப்ளரின் மூன்றும் விதியை எளிதில் தருவிக்கலாம்; ஆதிப் புள்ளியில் சூரியன் இருப்பதாகவும், μ ஆனது எல்லாக் கிரகங்களுக்கும் ஒன்றே யென்றும் கொள்க. முறையே $2a_1$, $2a_2$ நீளம் நெட்டச்சு கொண்டுள்ள பாதைகளில் செல்லும் இரு கிரகங்களின் கால வட்ட நேரம் T_1, T_2 எனில்,

$$T_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}a_1^{\frac{3}{2}},\quad T_2 = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}a_2^{\frac{3}{2}}$$

எனவே $\dfrac{T_1}{T_2} = \dfrac{a_1^{\frac{3}{2}}}{a_2^{\frac{3}{2}}}$. இதுவே கெப்ளரின் மூன்றும் விதி.

(iii) $e > 1$ என்க, இப்போது $E > 0$ பாதை ஒரு அதிபரவளைவு. இதன் குறுக்கச்சு நீளம் $2a$ எனில்,

$$q = \frac{h^2}{\mu(e+1)},\quad q' = \frac{h^2}{\mu(e-1)},\quad q'-q = 2a.$$

எனவே $h^2 = \mu a(e^2-1)$. பாதையின் சமன்பாடு

$$r = \frac{a(e^2-1)}{1+e\cos w}.$$

மேலும் $$e^2 = 1 + \frac{2\mu a(e^2-1)}{m\mu^2}E$$

என்பதால், $E = \dfrac{m\mu}{2a}$. இதனை (8) ல் பிரதியிட,

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{m\mu}{r} = \frac{m\mu}{2a}.\quad \text{எனவே } v^2 = \mu\left\{\frac{2}{r} + \frac{1}{a}\right\}$$

3.3 இரு பொருள் இயக்கம் (Two body problem),

m, m_0 என்ற திணிவுகள் கொண்ட இரு துகள்கள் தலைகீழ் வர்க்க விசைப்படி ஒன்றையொன்று கவர்ந்து நகரட்டும். O என்பது

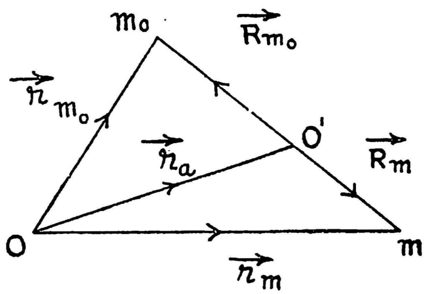
நிலையான புள்ளி என்க.

$$\overrightarrow{O_m} = \mathbf{r}_m, \quad \overrightarrow{O_{m_0}} = \mathbf{r}_{m_0}, \quad \overrightarrow{m_0 m} = \mathbf{r}$$

என்க. m_0, m ஆகியவற்றின் திணிவுமையம் O' எனில்,

$\overrightarrow{OO'} = \mathbf{r}_a$ என்க.

$$\mathbf{r}_a = \frac{m_0 \mathbf{r}_{m_0} + m \mathbf{r}_m}{m_0 + m}.$$



படம் 3.3

m_0-ன் மீது விசை $\dfrac{G m_0 m}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$, அதாவது $\dfrac{G m_0 m}{r^3} \mathbf{r}$

m-ன் மீது விசை $-\dfrac{G m_0 m}{r^3} \mathbf{r}$

இயக்கச் சமன்பாடுகள் $$m_0 \frac{d^2 \mathbf{r}_{m_0}}{dt^2} = \frac{G m_0 m}{r^3} \mathbf{r} \qquad (10)$$

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}_m}{dt^2} = -\frac{G m_0 m}{r^3} \mathbf{r} \qquad (11)$$

எனவே $$m_0 \frac{d^2 \mathbf{r}_{m_0}}{dt^2} + m \frac{d^2 \mathbf{r}_m}{dt^2} = 0$$

அதாவது $$\frac{d^2}{dt^2} (\mathbf{r}_a) = 0_r$$

$\therefore \quad \mathbf{r}_a = \mathbf{c}_1 t + \mathbf{c}_2$

$\therefore \quad O'$ ஆனது ஒரு நிலைக்கோட்டில் நகருவது புலப்படும்.

(10), (11) ம் சமன் பாடுகளிலிருந்து,

$$\frac{d^2}{dt^2} (-\mathbf{r}_{m_0} + \mathbf{r}_m) = -\frac{G(m + m_0)}{r^3} \mathbf{r}$$

அதாவது $$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{G(m + m_0)}{r^3} \mathbf{r} \qquad (12)$$

இச்சமன்பாட்டிலிருந்து m_0 ஐச் சார்ந்த mன் இயக்கத்தை அறியலாம். வான இயக்கவியலில் m_0 ஐச் சூரியனுகவும் m ஐ ஒரு கிரகமாகவும் கொள்ளலாம், அல்லது m_0 ஐ ஒரு கிரகமாகவும் m ஐ அதன் துணைக்கோளாகவும் கொள்ளலாம். m_0x, m_0y, m_0z என்பன சூரியனை ஆதிப்புள்ளியாகக் கொண்ட நிலையான அச்சுகள் எனில், (12) ம் சமன் பாட்டை

$$\frac{d^2 x}{d t^2} + \frac{\mu x}{r^3} = 0 \tag{13}$$

$$\frac{d^2 y}{d^2 t^2} + \frac{\mu y}{r^3} = 0 \tag{14}$$

$$\frac{d^2 z}{d t^2} + \frac{\mu z}{r^3} = 0 \tag{15}$$

என்று எழுதலாம். இங்கு $\mu = G(m_0 + m)$ என்பதை அறிக. (15) ம் சமன்பாட்டை y ஆலும் (14) ம் சமன்பாட்டை z ஆலும் பெருக்கிக்கழிக்க

$$y\frac{d^2 z}{d t^2} - z\frac{d^2 y}{d t^2} = 0 \tag{16}$$

இதனைத் தொகைப்படுத்த,

$$y\frac{d z}{d t} - z\frac{d y}{d t} = A \tag{17}$$

இவ்வாறே

$$z\frac{d x}{d t} - x\frac{d z}{d t} = B \tag{18}$$

$$x\frac{d y}{d t} - y\frac{d x}{d t} = C \tag{19}$$

இங்கு A, B, C என்பன தொகையீட்டு நிலையெண்கள். (17), (18), (19) ம் சமன்பாடுகளை முறையே x, y, z ஆல் பெருக்கிக் கூட்ட,

$$Ax + By + Cz = 0 \tag{20}$$

எனவே m ஆனது m_0 ஐச்சுற்றி தளப்பாதையொன்றில் செல்கிறது. மேலும் இத்தளம் m_0 வழியே செல்கிறது. இத்தளத்தில் O' ஐப் பொறுத்து m_0, m ஆகியவற்றின் ஆரைத்தூரங்கள் R_{m_0}, R_m எனில், இயக்கச் சமன்பாடுகளை

$$\frac{d^2 R_{m0}}{d t^2} - R_{m0}\left(\frac{d\theta}{d t}\right)^2 = -\frac{Gm}{r^2}, \quad \frac{1}{R_{m_0}}\frac{d}{d t}\left(R_{m_0}{}^2\frac{d\theta}{d t}\right) = 0$$

$$\frac{d^2 R_m}{d t^2} - R_m\left(\frac{d\theta}{d t}\right)^2 = -\frac{G_{m_0}}{r^2} \quad \frac{1}{R_m}\frac{d}{d t}\left(R_{m_0}{}^2\frac{d\theta}{d t}\right) = 0$$

என்றும் எழுதலாம். இவற்றைக் கூட்ட, $r = R_{m_0} + R_m$ என்பதால்,

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -\frac{G(m_0+m)}{r^2}. \qquad (21)$$

$R_m = \dfrac{m_0 r}{m_0+m}$ என்பதாலும், $R^2_m \dfrac{d\theta}{dt}$ ஒரு நிலையான எண் என்பதாலும், $r^2 \dfrac{d\theta}{dt}$ = நிலையான எண் $= h$ (22)

இதன் கூறுகளே (17), (18), (19)ல் காணப்படுபவை.

(21), (22)ம் சமன்பாடுகள் 3·1, (1), (2)ம் சமன்பாடுகளைப் போன்றவை. எனவே (6)ம் சமன்பாட்டைப் போன்ற ஒரு சமன்பாடு இங்கு கிடைக்கிறது; ஆனால் $\mu = G(m_0+m)$ என்பதை நினைவிற் கொள்க. எனவே (21), (22)ன் தீர்வுகள், 3·2ல் தந்துள்ள தீர்வுகளைப் போன்றவையே.

எனவே m_0ஐப் பொறுத்த mன் சார்பு இயக்கத்தின் தீர்வை

$$r = \frac{h^2/\mu}{1+e\cos(\theta-\epsilon)}$$

என்று எழுதலாம். இங்கு

$$\mu = G(m_0+m) \qquad (23)$$

என்பதைக் கவனிக்க. 3·2ல் கண்ட மற்ற உண்மைகளும் இங்கு பொருந்தும். ஆனால் மொத்த சக்தி இங்கு $\dfrac{m\,m_0+E}{m+m_0}$ என்பது கவனிக்கத் தக்கது.

3·4. நீள்வளைய இயக்கம்

mன் பாதையானது m_0 ஐக் குவியமாகக் கொண்ட நீள்வளைய பாதையாக இருப்பது வான இயலில் மிக முக்கியமானதாகும். $2a$ என்பது நீள் வளையத்தின் நெட்டச்சு எனில்,

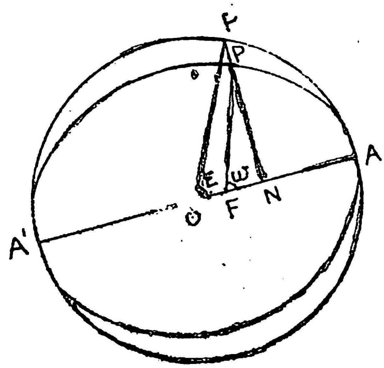
$$h^2 = \mu a(1-e^2) \qquad (24)$$

எனவே பாதையின் சமன்பாடு

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos w} \qquad (25)$$

படத்தில் $A\,P\,A'$ என்ற வளைவு ஒரு நீள்வளையம். அதன் மையம் O. F என்பது அதன் ஒரு குவியம். இங்குதான் m_0 இருப்பதாகக் கொள்வோம். AA' என்பது நீள் வயத்தின் நெட்டச்சு, A அண்மைப் புள்ளி. கிரகமானது P எனும் புள்ளியில் இருக்கும்

போது நேரம் t, Aயிலிருக்கும்போது நேரம் t_0 என்க. Aயிலிருந்து Pக்குச் செல்வதற்கான நேரம் $t-t_0$ கோணம் AFPஐ w என்று குறிக்கிறோம். இதுதான் இயல்பு நெறிப் பிறழ்ச்சி (true anomaly). AA'ஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தை, P-இலிருந்து AA'க்கு வரையப்பட்ட செங்குத்து P'ல் வெட்டட்டும். கோணம் $P'OA$ஐ,



படம் 3.4

கிரகத்தின் மையவகற்சி நெறிப் பிறழ்ச்சி (eccentric anomaly) என்போம். இதனை E என்று குறிப்பிடுவோம். இயல் முறை வடிவ கணிதத்தில் E என்பது Pன் மையவகற்சிக் கோணம் எனப்படும்.

$OP' = OA = a$ என்பதால் $ON = a\cos E$. நீள் வளையத்தின் சிற்றச்சு $2b$ எனில், $b = a\sqrt{1-e^2}$ என்பதை நாம் அறிவோம்.

எனவே

$$NP = b\sin E = a\sqrt{1-e^2}\sin E.$$

மேலும்

$$\begin{aligned} r^2 &= FP^2 = FN^2 + NP^2 = (ON-OF)^2 + NP^2 \\ &= (a\cos E - ae)^2 + a^2(1-e^2)\sin^2 E \\ &= a^2(1-2e\cos E + e^2\cos^2 E) \\ &= a^2(1-e\cos E)^2 \end{aligned}$$

எனவே $r = a(1-e\cos E)$ (26)

அடுத்தபடியாக, Eக்கும், wக்குமுள்ள தொடர்பைக் காண்போம். E-ம், w-ம் எப்போதும் ஒரே காற்பகுதி (quadrant)யில் உள்ளதைக் கவனிக்க.

$$\sin w = \frac{NP}{r} = \frac{a\sqrt{1-e^2}\sin E}{a(1-e\cos E)} = \frac{\sqrt{1-e^2}\sin E}{1-e\cos E} \qquad (27)$$

$$\cos w = \frac{FN}{e} = \frac{a\cos E - ae}{a(1-e\cos E)} = \frac{\cos E - e}{1-e\cos E} \qquad (28)$$

திரிகோண கணிதத்தின்படி $\cos w = \dfrac{1-\tan^2 \frac{w}{2}}{1+\tan^2 \frac{w}{2}}$. எனவே

$$\tan^2 \frac{w}{2} = \frac{1-\cos w}{1+\cos w}$$

$$= \frac{1 - \dfrac{\cos E - e}{1-e\cos E}}{1 + \dfrac{\cos E - e}{1-e\cos E}}$$

$$= \frac{(1+e)\,(1-\cos E)}{(1-e)\,(1+\cos E)}$$

$$= \frac{1+e}{1-e}\tan^2\frac{E}{2}$$

எனவே $$\tan\frac{w}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,\tan\frac{E}{2}. \qquad (29)$$

T என்பது நீள் வளையப் பாதையை ஒரு முறை சுற்றிவர ஆகும் காலம் என்க. நீள்வளையத்தின் பரப்பு $\pi a^2 \sqrt{1-e^2}$, பரப்பு வேகம் $\frac{1}{2}h$ என்பதால்,

$$T = \frac{2\pi a^2 \sqrt{1-e^2}}{h} = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{\mu}} \qquad (30)$$

$\dfrac{2\pi}{T}$ என்ற எண்ணை n என்று குறிப்பது வழக்கம்.

$$T = \frac{2\pi}{n} \qquad (31)$$

நிலையான சுழல் வேகத்தில் ஒரு துகளானது நீள் வளையப் பாதையை T கால அளவில் ஒரு முறை சுற்றுமாயின், அதன் சுழல் வேகம் $= \dfrac{2\pi}{T} = n$. இக்காரணத்திற்காக n ஐச் சராசரி இயக்கம் (mean motion) எனப்படும். (30), (31) லிருந்து நாம் பெறுவது :

$$n^2 a^3 = \mu \qquad (32)$$

$t-t_0$ கால அளவில், n எனும் நிலையான சுழல் வேகத்தை மேற்கொண்டுள்ள துகள் ஒன்று, Aயிலிருந்து தொடங்கி M கோண அளவு நகர்ந்திருக்குமாயின்

$$M = n\,(t-t_0) \qquad (33)$$

M ஐச் சராசரி நெறிப் பிறழ்ச்சி (mean anomaly) என்போம்.

நீள் வளையத்தை, அதன் துணைவட்டத்தின் (auxiliary circle) குத்து வீழ்ச்சி (orthogonal projection)யாகக் கருதலாம். இத்தகைய வீழ்ச்சியில் பரப்பளவுகளின் விகிதம் மாறுபடுவதில்லை. ஆதலால்

$$\frac{AFP \text{ என்ற நீள்வளையப் பகுதியின் பரப்பளவு}}{\text{முழு நீள்வளையத்தின் பரப்பளவு}}$$

$$= \frac{AFP' \text{ என்ற வட்டப் பகுதியின் பரப்பளவு}}{\text{முழு வட்டத்தின் பரப்பளவு.}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}a^2 E - \frac{1}{2} OF \cdot NP'}{\pi a^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}a^2 E - \frac{1}{2} ae \cdot a \sin E}{\pi a^8}$$

$$= \frac{1}{2\pi}(E - \sin E)$$

மேலும், பரப்பளவு வேகம் நிலையானது என்பதால்

$$\frac{AF\text{P என்ற நீள்வளையப் பகுதியின் பரப்பளவு}}{\text{முழு நீள் வளையத்தின் பரப்பளவு}}$$

$$= \frac{t - t_0}{T} = \frac{n(t - t_0)}{nT} = \frac{M}{2\pi}$$

எனவே $\frac{1}{2\pi}(E - \sin E) = \frac{M}{2\pi}$,

அல்லது $E - \sin E = M$ (34)

இந்தச் சமன்பாட்டை, கெப்ளரின் சமன்பாடு (Kepler's equation) என்று குறிப்பிடுவர்.

கெப்ளரின் சமன்பாட்டை, மற்றொரு முறையிலும் வருவிக்கலாம். (26)ம் சமன்பாட்டை வகைப்படுத்த,

$$\frac{dr}{dt} = ae \sin E \frac{dE}{dt} \tag{35}$$

(25)ஐ வகைப்படுத்த

$$\frac{dr}{dt} = \frac{e \sin w}{a(1 - e^2)} \frac{r^2 dw}{dt} = \frac{e \sin w}{a(1 - e^2)} h \tag{36}$$

$h^2 = \mu a(1 - e^2) = n^2 a^4 (1 - e^2)$ என்பதால் $h = na^2 \sqrt{1 - e^2}$

எனவே (36) லிருந்து

$$\frac{dr}{dt} = \frac{e \sin w}{a(1 - e^2)} na^2 \sqrt{1 - e^2} = \frac{nae \sin w}{\sqrt{1 - e^2}}$$

இதனை (35)ல் பிரதியிட, கிடைப்பது

$$\frac{dE}{dt} = \frac{n \sin w}{\sqrt{1-e^2} \sin E}$$

படத்திலிருந்து $r \sin w = NP = a \sqrt{1-e^2} \sin E$ என்பதால்

$$\frac{dE}{dt} = \frac{na}{r} = \frac{na}{a(1-e \cos E)}$$

எனவே $(1-e \cos E) \dfrac{dE}{dt} = n$

இதனைத் தொகையீடு செய்ய, $E - e \sin E = nt + c$

$t = t_0$ எனில் $E = 0$ எனவே $c = -n t_0$ எனவே

$$E - e \sin E = n(t - t_0)$$

அதாவது $E - e \sin E = M$

கெப்ளரின் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க முற்படுமுன், கெப்ளரின் மூன்றும் விதியின் சரியான உருவத்தை தருவிப்போம். (30) ன் படி

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} a^{3/2}.$$

$$\therefore \frac{a^3}{T_2} = \frac{\mu}{4\pi} \text{ அதாவது } \frac{a^3}{T^2} = \frac{G(m_0 + m)}{4\pi^2}$$

இங்கு m_0 என்பது சூரியனின் திணிவு, m என்பது ஒரு கிரகத்தின் திணிவு. a, T என்பன இக்கிரகத்திற்குச் சூரியனைச் சுற்றிய பாதையைக் குறிப்பவை.

m_1 என்பது வேறொரு கிரகத்தின் திணிவு, a_1, T_1 என்பன இதன் பாதையைக் குறிப்பவை எனில்

$$\frac{{a_1}^3}{{T_1}^2} = \frac{G(m_0 + m_1)}{4\pi^2}. \text{ எனவே}$$

$$\frac{a^3_1/{T_1}^2}{a^3/T^2} = \frac{1 + \dfrac{m_1}{m_0}}{1 + \dfrac{m}{m_0}} \qquad (37)$$

$\dfrac{m}{m_0}$, $\dfrac{m_1}{m_0}$ என்ற விகிதங்கள் மிகச்சிறிய எண்கள். வியாழனின் (Jupiter) திணிவுதான் கிரகங்களின் திணிவுகளுள் மிகப் பெரியது; அதுவே சூரியனின் திணிவில் $\dfrac{1}{1047}$ பாகம் தான். எனவே,

$\frac{m_1}{m_0}$, $\frac{m}{m_0}$ ஆகிய மிகச்சிறிய எண்களைத் தள்ளிவிட்டால், $\frac{a^3{}_1}{T_1{}^2} = \frac{a^3}{T^2}$ என்று தோராயமாகக் கிடைக்கும். இதுவே கெப்ளரின் மூன்ருவது விதி. கிரகத்திற்குக் கிரகம் திணிவுகள் மாறுபடுவதால் கெப்ளரின் மூன்ருவது விதி சரியல்ல. சரியான விதி (37) ல் தரப்பட்டதே.

எடுத்துக்காட்டு : சனிக்கு (Saturn), டைடான் (Titan) என்று பெயர் கொண்ட துணைக் கோள் உண்டு. இதன் காலவட்ட நேரம் (period) 15·945452 நாட்கள். அதன் சராசரித்தூரம் சனியி லிருந்து ·008166 வான இயல் அலகுகள். சனியின் திணிவு, சூரியனின் திணிவில் சுமார் $\frac{1}{3500}$ என்று காட்டுக.

டைடான், சனி, சூரியன் ஆகியவற்றின் திணிவுகள் முறையே m_s, m, m_0 என்க. a_s, a என்பன முறையே, டைடானுக்கும் சனிக்கும், சனிக்கும் சூரியனுக்கும் இடையிலுள்ள (சராசரித்) தூரங்கள். காலவட்ட நேரம் டைடானுக்கு சனியைச் சுற்றி T_s, சனிக்குச் சூரியனைச் சுற்றி T என்க. சரிப்படுத்திய கெப்ளர் விதிப்படி,

$$\frac{T_s{}^2}{a_s{}^3}\,(m_s+m) = \frac{4\pi^2}{G}\,,\quad \frac{T^2}{a^3}\,(m+m_0) = \frac{4\pi^2}{G}\,.$$

m உடன் ஒப்பிடுகையில் m_s மிகச்சிறியது. m_0 உடன் ஒப்பிடுகையில் m சிறியது. எனவே இச்சமன்பாடுகளை

$$\frac{T_s{}^2}{a^3{}_s}\,m = \frac{4\pi^2}{G} = \frac{T^2}{a^3}\,m_0$$

என்று எழுதலாம். T ஐ மீன்வழி வருடங்களாக (siderial years) வும் a ஐ வானியல் அலகுகளிலும் எழுதினுல், $\frac{T^2}{a^3} = 1$ ஆகும்.

$$\text{எனவே } \frac{m}{m_0} = \frac{a_s{}^3}{T_s{}^2} = \frac{(\cdot008166)^3}{\left(\dfrac{15\cdot945}{365\cdot256421}\right)^2} = \frac{1}{3501} \text{ (சுமாராக.)}$$

3·5. கெப்ளரின் சமன்பாடு

நீள்வட்ட இயக்கத்தின் தீர்வுக்கு மேலே தந்துள்ள சமன்பாடுகள் போதுமானவை. m, m_0, a, e, t_0 ஆகிய தரப்பட்டுள்ளதாகக் கொண்டால், (23) ன் படி μ ஐக் கண்டுபிடிக்கலாம். (32) லிருந்து n தெரியவ்ரும். இதனுல் 31 லிருந்து T கிடைக்கும். கொடுத்துள்ள நேரம் t எனில் $M=n\;(t-t_0)$ என்று கணக்கிடலாம். கெப்ளரின்

சமன்பாட்டைத் தீர்த்தால் E கிடைக்கும். இதிலிருந்து (26) ஐக் கொண்டு r-ஐயும், (29) ஐப் பயன்படுத்தி w-ஐயும் பெறலாம். இக் கணக்கீடுகளில், கெப்ளரின் சமன்பாட்டைத் தீர்ப்பதே எளிதற்ற காரியம்; மற்றவை சாதாரணச் சமன்பாடுகளே. ஏனெனில் கெப்ளரின் சமன்பாடு ஒரு அதியியல் சமன்பாடு (transcendental equation).

கெப்ளரின் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க நூற்று இருபதுக்கும் மேலான வழிமுறைகள் கண்டுபிடிக்கப் பட்டுள்ளன. அவற்றில் சிலவற்றை அடியில் விவரிப்போம். இவையனைத்துமே தோராய முறைகள் என்பதை நினைவில் கொள்ள வேண்டும்.

முதலில் கெப்ளரின் சமன்பாட்டுக்கு ஒரேயொரு தீர்வு உள்ளது என்று காட்டுவோம்.

$f(E)=E-e\sin E-M$ என்க.

$s\pi < M < (s+1)\pi$, s ஒரு முழு என்க.

$f(s\pi) = s\pi - M <0, f(s+1)\pi = (s+1)\pi - M > 0$.

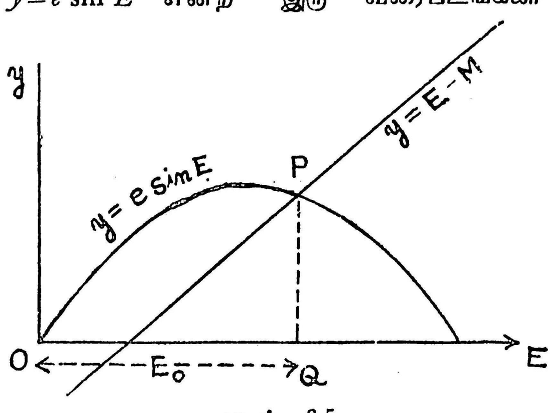
எனவே $f(E)=0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு, $s\pi$ க்கும், $(s+1)\pi$ க்கு மிடையே ஒரு தீர்வு உள்ளது. மேலும் $f'(E) = 1-e\cos E$. ஆனால் $e<1$ என்பதால், E ன் எல்லாமதிப்புகளுக்கும் $f'(E) >0$. எனவே $f(E)$ ஆனது ஓர் ஒருசீர் ஏறும் சார்பு (monotonic increasing function). ஆகவே $f(E)=0$ க்கு ஒரேயொரு தீர்வுதான் உள்ளது என்றறிகிறோம்.

(i) வரைபட முறை :

$M = E - e\sin E$ என்ற சமன்பாட்டில், M தரப்பட்டுள்ளது; E காணப்பட வேண்டும்.

$\therefore \quad E-M=e\sin E$

$y=E-M$, $y=e\sin E$ என்ற இரு வரைபடங்களை வரைக.



படம் 3.5

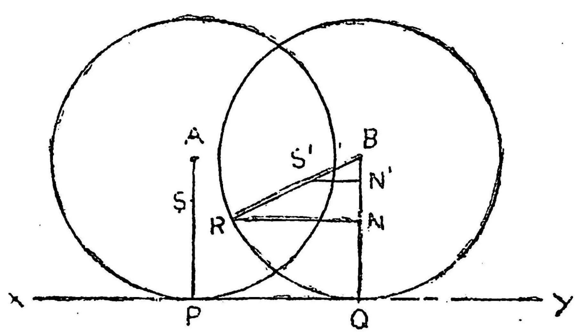
இவை P எனும் புள்ளியில் வெட்டிக் கொள்ளட்டும். PQ என்பது E—அச்சுக்குச் செங்குத்தாக வரையப்பட்டால், $OQ=E_0$ என்பது, $PQ=E_0-M$, $PQ=e\sin E_0$ என்பவற்றிற்கிணங்க அமையும். எனவே $E_0-M=e\sin E_0$. $\therefore\ M=E_0-e\sin E_0$.

இதனுல் E_0 தான் கெப்ளரின் சமன்பாட்டின் தீர்வு என்றறிகிறேும்.

முதலில் E_0ன் மதிப்பைத் தோராயமாக இம்முறையில் அறிக. பிறகு இதன் அருகாமையில் இரு வரைபடங்களேயும் பெரிய அளவில் மிக நுணுக்கமாக வரைந்து கொள்க. இப்போது இவை வெட்டும் புள்ளியின் E—அச்சுத்தூரம் முன்னதை விட அதிக நுணுக்க மானதான இருக்கும்.

(ii) நியூட்டனின் உருளும் வட்டத்தட்டு முறை

ஒரு அலகு ஆரமுள்ள ஒரு வட்டத்தட்டு XY என்ற கோட்டின் மேல் உருண்டு (rolling) செல்லட்டும். ஒரு நிலேயில் வட்டமையம் A,



படம் 3.6

தொடுபுள்ளி P என்க. E அளவு கோணம் உருண்டபின் இவ்வட்டத்தின் மையம் B, புதிய தொடுபுள்ளி Q என்க. P எனும் பழைய தொடுபுள்ளி வட்டத்தில் இப்போது R என்னுமிடத்தி லிருக்கிறது. எனவே $\angle QBR$ன் அளவே E ஆகும்.

S எனும் புள்ளி, APன் மீது $AS=e$ என்றபடி இருக்கட்டும். வட்டத்தகடு உருண்டபின் S ஆனது S' என்ற நிலேக்கு வந்தால், S' இப்போது BRன் மேலுள்ள புள்ளி, $BS'=e$. BQக்குச் செங்குத்தாக $S'N'$ வரைக. S ஆனது XYன் திசையில் நகர்ந்துள்ள தூரமே M ஆகும் என்று இப்போது காட்டுவோம்.

நிரூபணம்: XYன் திசையில் S நகர்ந்த தூரம்

$$= PQ - S'N'$$
$$= \text{வில்}\ RQ - S'N'$$
$$= 1.\ E - BS',\ \sin E$$
$$= E - e \sin E.$$
$$= M.$$

எனவே நிரூபணம் நிறைவு பெற்றது.

இப்போது Sஐ Mதூரம் XYன் திசையில் நகருமாறு வட்டத் தகட்டை உருட்டுக. இதனிடையில் எந்தக் கோண அளவுக்குத் தகடு சுற்றியது என்று அளக்க. இதுவே Eன் மதிப்பாகும்.

(iii) **தொடர் மாற்றி முறை** (Reversion of series method)

முதல் தோராயமாக Eன் மதிப்பை M என்று கொள்ளலாம். இதனை E_1 என்று குறிக்க. $E_1 = M$.

e என்பது மிகச்சிறிய எண் என்றால், Eக்கும் Mக்கும் அதிக வித்தியாசம் இருக்காது. எனவே சைனுக்குள் Eக்குப் பதிலாக E_1 என்றே எழுதி $E_2 = M + e \sin M$ என்று பெறலாம். இதுவே இரண்டாம் தோராயம்,

Eக்கு E_2 என்று (சைனுக்குள்) கெப்ளரின் சமன்பாட்டில் புகுத்தி மூன்றும் தோராயத்தைப் பெறுக.

$$E_3 = M + e \sin E_2$$
$$= M + e \sin (M + e \sin M)$$
$$= M + e \sin M \cos (e \sin M) + e \cos M \sin (e \sin M)$$

e என்பது மிகச்சிறிய எண் என்பதால்,

$$\cos (e \sin M) = 1 - \frac{e^2 \sin^2 M}{\underline{|2}} + \frac{e^4 \sin^4 M}{\underline{|4}} - \cdots$$

$$\sin (e \sin M) = e \sin M - \frac{e^3 \sin^3 M}{\underline{|3}} + \frac{e^5 \sin^5 M}{\underline{|5}} - \cdots$$

இவற்றை E_3 ல் பிரதியிட்டு, e^2 வரை நிறுத்திக் கொண்டால்

$$E_3 = M + e \sin M \left(1 - \frac{e^2 \sin^2 M}{\underline{|2}}\right) + e \cos M \ (e \sin M)$$
$$= M + e \sin M + e^2 \sin M \cos M$$
$$= M + e \sin M + \frac{e^2}{2} \sin 2M$$

இம்முறையில் திரும்பத் திரும்பச் செயல்படுவதால், Eக்கு மேலும் மேலும் நுணுக்கமான (accurate) மதிப்புகள் கிடைக்கின்றன.

அடுத்த தோராயம்

$$E_4 = M + \left(e - \frac{e^3}{8}\right)\sin M + \frac{e^2}{2}\sin 2M + \frac{3}{8}e^3 \sin 3M.$$

(iv) **நியூட்டனின் வகையீட்டு முறை**

e-ன் மதிப்பு மிகச்சிறியதாக (·2க்கும் குறைந்ததாக) இல்லாவிடில், தொடர்மாற்றி முறையில் நுணுக்கமான மதிப்பைப் பெற பல உறுப்புகளை எடுத்துக் கொள்ள வேண்டியிருக்கும். எனவே நடைமுறையில் பயனற்றதாகிவிடும். அந்நிலைகளில் நியூட்டனின் வகையீட்டு முறையைக் கடைபிடிக்கலாம்.

கொடுத்துள்ள Mக்கு இசைந்த Eன் தோராய மதிப்பொன்றை E_0 என்க. $M_0 = E_0 - e \sin E_0$ என்க. M ஆனது Eல் ஒரு தொடர்ச்சியுள்ள (continuous) மாறி என்பதனால், $M = f(E)$ எனில், டேலர் தேற்றப்படி,

$$M = f(E_0) + (E - E_0) f'(E_0) + \frac{(E - E_0)^2}{\underline{|2}} f''(E_0) + \dots$$

$E - E_0$ ஒரு சிறிய எண். எனவே $(E - E_0)^2$, $(E - E_0)^3, \dots$ ஆகியவற்றை நீக்கிவிடலாம் (முதல் தோராயம்) என்க.

$$M = f(E_0) + (E - E_0) f'(E_0), \text{ மேலும் } f'(E) = 1 - e \cos E.$$

எனவே $E = E_0 + \dfrac{M - E_0 + e \sin E_0}{1 - e \cos E_0}$

இவ்வாறே அடுத்தடுத்துச் செயல்பட்டு, Eக்கு மிக நுணுக்கமான மதிப்புகளைப் பெறலாம்.

(v) **அட்டவணை முறை** (Numerical method)

Eன் சில மதிப்புகளுக்குச் சரியான Mன் மதிப்புகளை, வெவ்வேறு eன் மதிப்புகளுக்கு அட்டவணைப் படுத்தியுள்ளனர். இத்தகைய அட்டவணைகளிலிருந்து இடைச் செருகல் (inverse interpolation) முறைப்படி, கொடுத்துள்ள Mக்கு இசைந்த Eன் மதிப்பைக் கண்டுபிடிக்கலாம்.

(vi) **தொடர் முறை** (Series method)

கெப்ளரின் சமன்பாட்டிலிருந்து Eஐ Mன் சார்பாகத் தீர்த்து Mல் ஒரு கந்தழித் தொடரைப் பெற்றுள்ளனர். இது

$$E = M + 2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin pM}{p} J_p(pe)$$

என்பதாம். இங்கு J என்பது பெஸ்ஸல் சார்பு (Bessel function) எனப்படும். பெஸ்ஸல் சார்புகள், பயன்படு கணிதப் பகுதியில் வெகு விரிவாக ஆராயப்பட்டுள்ள சார்புகளாகும். $J_p(x)$ என்பது

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}+\left(1-\frac{p^2}{x^2}\right)y=0$$

என்ற வகைக் கெழுச் சமன்பாட்டின் ஒரு சிறப்புத் தீர்வாகும்.

$J_p(x)$க்குக் கந்தழித் தொடர்கள் தரப்பட்டுள்ளன :

$$J_p(x)=\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^r}{\underline{|r}\;\underline{|r+p}}\left(\frac{x}{2}\right)^{2r+p}$$

சிறப்பாக, $J_1(e)=\frac{e}{2}\left\{1-\frac{e^2}{8}+\frac{e^4}{192}-\cdots\right\}$

$$J_2(2e)=\frac{e^2}{2}\left\{1-\frac{e^2}{3}+\frac{e^4}{24}-\cdots\right\}$$

$$J_3(3e)=\frac{9e^3}{16}\left\{1-\frac{9e^2}{16}+\frac{81e^4}{640}-\cdots\right\}$$

$J_p(x)$ஐத் தொகை (integral) யாகவும் எழுதலாம் :

$$J_p(pe)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(pE-pe\sin E)\,dE$$

$$J_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(n\theta-x\sin\theta)\,d\theta$$

$J_n(x)$க்கு ஒரு திருப்புச் சூத்திரமொன்று :

$$J_n(x)=\frac{x}{2n}\left\{J_{n-1}(x)+J_{n+1}(x)\right\}$$

(vii) பிரவுன் முறை (Brown's method)

பல கிரகங்களின் பாதைகளுக்கு eன் மதிப்பு சுமார் 0·1 ஆக இருக்கிறது. இந்நிலையில் $E=M+x$ என்று எழுதி xஐக் கணக்கிடலாம்.

$M=E-e\sin E$, $E=x+M$ என்பதால், $x=e\sin(M+x)$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{\lfloor 3} + \frac{x^5}{\lfloor 5} - \cdots$$

$$= e\sin(M+x) - \frac{e^3\sin^3(M+x)}{\lfloor 3} + \frac{e^5\sin^5(M+x)}{\lfloor 5} - \cdots$$

எனவே $\sin x - e(\sin M\cos x + \cos M\sin x) = -\frac{e^3\sin^3(M+x)}{\lfloor 3} + \frac{e^5\sin^5(M+x)}{\lfloor 5} - \cdots$

அதாவது $\sin x(1-e\cos M) - e\sin M.\cos x$

$$= \frac{-e^3\sin^3(M+x)}{\lfloor 3} + \frac{e^5\sin^5(M+x)}{\lfloor 5} - \cdots$$

$\sin x(1-e\cos M) - e\sin M\cos x = A\sin(x-x_0)$ என்க.

அப்பொழுது $A\cos x_0 = 1-e\cos M$, $A\sin x_0 = e\sin M$

எனவே $A^2 = (1-e\cos M)^2 + e^2\sin^2 M = 1-2e\cos M + e^2$

மேலும் $\tan x_0 = \frac{e\sin M}{1-e\cos M}$

எனவே

$$\sin(x-x_0) = -\frac{e^3}{6A}\sin^3(M+x) + \frac{e^5}{120A}\sin^5(M+x) - \cdots$$

இங்கு வலப்புறம் xக்குப் பதில் x_0 என்றிட்டு, இரண்டாம் உறுப்பைத் தள்ளிவிட்டால்,

$$\sin(x-x_0) = -\frac{e^3}{6A}\sin^3(M+x_0)$$

இதனின்று xன் மதிப்பைப் பெறலாம். தீர்வு x' எனில், $E = M + x'$.

எடுத்துக்காட்டு: $e=\cdot 2$, $M=40°$ எனில், Eன் மதிப்பைக் காண்க.

கணக்குகளில் கோண அளவுகள் டிகிரியில் தரப்பட்டிருக்கும். e மட்டும் எண்ணாகத் தரப்பட்டிருக்கும். கோணங்களையும் எண்களாக ரேடியனில் மாற்றிக்கொண்டு கணக்குகளைச் செய்யலாம். அல்லது e-ஐயும் டிகிரி அளவில் மாற்றி எழுதிச் செயல்படலாம்.

இங்கு $E_1 = 40°$; $e = °2 = \frac{\cdot 2\times 180}{\pi} = 11\cdot 46°$

எனவே $\sin E_1 = \cdot 6428$, $e \sin M = 7{\cdot}24$

$\therefore\ E_2 = M + e \sin E_1 = 40 + 11{\cdot}46 \times {\cdot}6428 = 40 + 7{\cdot}24 = 47{\cdot}24$ டிகிரிகள்.

$\sin E_2 = {\cdot}7340$, $e \sin E_2 = 11{\cdot}46 \times {\cdot}7340 = 8{\cdot}410$

$\therefore\ E_3 = M + e \sin E_2 = 40 + 8{\cdot}41 = 48{\cdot}41$ டிகிரிகள்

$\sin E_3 = {\cdot}7480$, $e \sin E_3 = 11{\cdot}46 \times {\cdot}7480 = 8{\cdot}572$

$\therefore\ E_4 = M + e \sin E_3 = 40 + 8{\cdot}572 = 48{\cdot}572$ டிகிரிகள்

$\sin E_4 = {\cdot}7498$, $e \sin E_4 = 11{\cdot}46 \times {\cdot}7498 = 8{\cdot}594$

$\therefore\ E_5 = M + e \sin E_4 = 40 + 8{\cdot}594 = 48{\cdot}594$ டிகிரிகள்

$\sin E_5 = {\cdot}7501$, $e \sin E_5 = 11{\cdot}46 \times {\cdot}7501 = 8{\cdot}598$

$\therefore\ E_6 = 40 + 8{\cdot}598 = 48{\cdot}598$ டிகிரிகள்

$\sin E_6 = {\cdot}7501$, $e \sin E_6 = 8{\cdot}598$

$\therefore\ E_7 = 48{\cdot}598$ டிகிரிகள்

$= 48^\circ\ 35^\circ\ 52''{\cdot}8$

இந்த கணக்கீட்டில் நான்கு முக்கிய இலக்க மடக்கைகள் பயன்படுத்தப்பட்டன. முறையை விளக்குவதற்கு மட்டுமே இது பயன்படும். வானியலில் பொதுவில் ஏழு தசம இடமடக்கை அட்டவணைகளையே பயன்படுத்துகின்றனர்.

கெப்ளரின் சமன்பாட்டைத் தீர்க்கும் அவசியம் Eஐக் கணக்கிடுவதற்காகவே. Eஐக் கண்டுபிடித்துவிட்டால், wஐக் கணக்கிடலாம். w விலிருந்து r ஐயும் பெறலாம். Eஐக் கணக்கிடாமலே wஐக் கணக்கிட சிறப்பு அட்டவணைகள் தயார் செய்யப்பட்டுள்ளன. இவற்றில் eக்கும், Mக்கும் பல்வேறு மதிப்புகளுக்கு இசைந்த $(w-M)$ன் மதிப்புகள் தரப்பட்டுள்ளன. $(w-\mathrm{M})$ஐ மையச்சமன்பாடு (equation of centre) என்று குறிப்பிடுகிறார்கள். $(w-M)$ உடன் Mஐக் கூட்டினால் w கிடைக்கும்.

3·6 நீள்வளையப் பாதையில் விரிவுகள் (Expansions in an elliptic orbit)

பல கணக்கீடுகளில் E, r, w முதலியவற்றை நேரடியாக Mன் சார்புகளாக எழுதுதல் அவசியமாகிறது. இச்சார்புகள் கந்தழித் தொடர் வடிவில், Mல் காலவட்டச் சார்புகளாக அமைதல் நலம் (அத்தியாயம் 7 பார்க்க).

$$f(M) = \tfrac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n M + b_n \sin{}_n M) \text{ என்க.}$$

இருபுறமும் Oவிலிருந்து 2π வரை தொகையீடு செய்ய,

$$\int_0^{2\pi} f(M)\,dM = \tfrac{1}{2}\,a_0 \cdot 2\pi. \quad \text{எனவே} \quad a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(M)\,dM$$

இருபுறமும் $\cos p\,M$ ஆல் பெருக்கித் தொகையீடு செய்க :

$$\int_0^{2\pi} f(M)\cos p\,MdM = a_p \cdot 2\pi \cdot \quad \text{எனவே}$$

$$a_p = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(M)\ \cos p\,M\,d\,M$$

இருபுறமும் $\sin\ p\,M$ ஆல் பெருக்கித் தொகையீடு செய்தால்,

$$\int_0^{2\pi} f(M)\sin p\,M\,d\,M = b_p \cdot 2\pi. \quad \text{எனவே}$$

$$b_p = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(M)\ \sin p\,M\,d\,M$$

$f(M)$ ஆனது ஓர் ஒற்றைச் சார்பு (odd function), எனில்,

$$a_0 = a_1 = \ldots = a_n = \ldots = 0,\ b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(M)\sin n\,MdM$$

$f(M)$ ஓர் இரட்டைச் சார்பு (even function) என்ருல்

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(M)\,d\,M,\ a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(M)\cos n\,M\,dM,$$

$$b_n = o,\ n = 1, 2, 3, \ldots\ldots$$

(i) $\sin E$க்கு விரிவு.

$\sin E$ என்பது Eல் ஒற்றைச்சார்பு. $E - e\sin E = M$ என்பதால் E ஆனது Mலும் ஒற்றைச் சார்பு. எனவே

$$\sin E = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\,M\ ,\ l_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin E \sin n\,M\,d\,M$$

$$\therefore b_n = \frac{2}{\pi}\left\{\sin E\left(\frac{-\cos nM}{M}\right) + \int \frac{\cos nM}{n}\cos E\, dE\right\}_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left\{0 + \frac{1}{2n}\int_0^{\pi}\Big[\cos(nM+E) + \cos(nM-E)\Big]\, dE\right\}$$

$$= \frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\cos\left\{(n+1)E - ne\sin E\right\} dE$$

$$+ \frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\cos\left\{(n-1)E - ne\sin E\right\} dE$$

$$= \frac{1}{n}\left\{J_{n+1}(ne) + J_{n-1}(ne)\right\}$$

$$= \frac{2}{e}\cdot\frac{J_n(ne)}{n}$$

$$\therefore \sin E = \frac{2}{e}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_n(ne)}{n}\sin nM$$

(ii) E-க்கு விரிவு.

கெப்ளர் சமன்பாட்டிலிருந்து

$$E = M + e\sin E$$

$$= M + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}J_n(ne)\sin nM$$

3·5ல் (vi)ல் கூறப்பட்ட தொடர் இதுவே.

(iii) $\frac{a}{r}$ க்கு விரிவு.

கெப்ளர் சமன்பாட்டிலிருந்து $\frac{dM}{dE} = 1 - e\cos E$

$$\therefore \frac{dE}{dM} = \frac{1}{1-e\cos E} = \frac{a}{r}$$

$$\therefore \frac{a}{r} = \frac{d}{dM}(E)$$

$$= \frac{d}{dM}\left\{M + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}J_n(ne)\sin nM\right\}$$

$$= 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_n(ne)\cos nM$$

(iv) cos wக்கு விரிவு

(25)ம் சமன்பாட்டின்படி $r = \dfrac{a(1-e^2)}{1+e\cos w}$

எனவே $e\cos w = -1 + (1-e^2)\dfrac{a}{r}$

$$\therefore \cos w = -\frac{1}{e} + \frac{1-e^2}{e}\left\{1+2\sum_{n=1}^{\infty} J_n(ne)\cos nM\right\}$$

$$= -e + \frac{2(1-e^2)}{e}\sum_{n=1}^{\infty} J_n(ne)\cos nM$$

இவை போன்ற மற்றும் சில விரிவுகளை, நிரூபணம் இல்லாமல் அடியில் தொகுத்துத் தந்துள்ளோம்.

(v) $$\cos E = -\tfrac{1}{2}e + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2}M\left\{\frac{d}{de}J_n(ne)\right\}\cos nM$$

(vi) $$\frac{r}{a} = 1 - e\cos E = 1 + \tfrac{1}{2}e^2 - 2e\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left\{\frac{d}{de}J_n(ne)\right\}\cos nM$$

(vii) $$\frac{r^2}{a^2} = 1 + \frac{3e^2}{2} - 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}J_n(ne)\cos nM$$

(viii) $\sin w = 2\sqrt{1-e^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left\{\frac{d}{de} J_n(ne)\right\} \sin nM$

3.7 பரவளைய இயக்கம்

சார் இயக்கத்தில் mன் பாதையானது m_0 ஐக் குவியமாகக் கொண்ட ஒரு பரவளையம் என்க. $e=1$. எனவே

$$r = \frac{h^2/\mu}{1+\cos(\theta-\epsilon)}$$

அண்மைத்தூரம் q எனில், $\theta=\epsilon$க்கு இசைவாக $r=q$. எனவே

$$h^2 = 2\mu q. \tag{38}$$

$\mu = G\,(m+m_0)$ என்பதை நினைவில் வைக்க, $\theta-\epsilon=w$ எனில், பரவளையின் சமன்பாட்டை $r = \dfrac{2q}{1+\cos w}$ (39)

என்றெழுதலாம்.

பரவளைய இயக்கம் காலவட்ட இயல்பு கொண்டதல்ல. எனவே சராசரி இயக்கம் n இங்கு பொருந்தாது; சராசரி நெறிப் பிறழ்ச்சியும் கிடையாது.

$r^2 \dfrac{d\theta}{dt} = h$ என்பதால், $hdt = r^2 d\theta = r^2 dw$

$$\therefore \sqrt{2\mu q}\, dt = \frac{4q^2}{(1+\cos w)^2}\, dw$$

$$\therefore \sqrt{\frac{\mu}{8q^3}}(t-t_0) = \int_0^w \frac{dw}{(1+\cos w)^2}.$$

$\tan\dfrac{w}{2} = z$ என்றிட, $\displaystyle\int_0^w \frac{dw}{(1+\cos w)^2} = \frac{1}{2}\int_0^z (1+z^2)\,dz = \frac{1}{2}\left(z+\frac{z^3}{3}\right)$

எனவே $$\sqrt{\frac{\mu}{2q^3}}(t-t_0) = z + \frac{z^3}{3} \tag{40}$$

t தரப்பட்டிருந்தால், அதற்கிசைவான zஐ இச் சமன்பாட்டினின்று பெறலாம். இச் சமன்பாட்டினை

$$F(z) \equiv \frac{z^3}{3} + z - \sqrt{\frac{\mu}{2q}}\,(t-t_0) = 0$$

என்று எழுதுவோம். $F(z)=0$ ஒரு ஒற்றை அடுக்குச் சமன்பாடு. ஆகவே அதற்கு ஒரு மெய்யெண்தீர்வு உண்டு. மேலும் $F'(z) = z^2+1 > 0$.

எனவே $F(z)$ ஓர் ஒருசீர் ஏறும் சார்பு. எனவே $F(z)=0$க்கு ஒரே யொரு தீர்வுதான் உள்ளது.

இத்தீர்வினின்று wம், பின்னர் rம் அறியப் பெறும்.

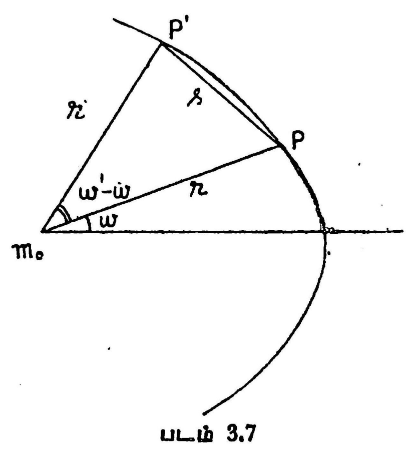
$$r = \frac{2q}{1+\cos w} = q \sec^2 \frac{w}{2} = q(1+z^2)$$

என்பதால், zன் மதிப்பையறிந்தவுடன் நேரிடையாக rன் மதிப்பைப் பெறலாம்.

புதிதாகக் கண்டுபிடிக்கப்பட்ட வால்மீன் (comet), சூரியனுக்கு அண்மைப்புள்ளியருகில் கவனிக்கப் படும்போது, அதன் பாதை நீள் வளையமா, பரவளையமா, அதிபரவளையமா என்று உடனே தீர் மானித்தல் கடினம். பரவளையப்பாதையைக் கணக்கிடுதல் எளி தானபடியால், முதலில் வால்மீனின் பாதையைப் பரவளையம் என்று கருதுதல் இயல்பே. பின்னர் மேலும் பல காட்சிப்பகுதிகள் செய்து இக்கருத்தை ஏற்கவோ, மாற்றவோ செய்யலாம். வால் மீனின் திணிவு, சூரியனின் திணிவுடன் ஒப்பிடும்போது அற்பமேயாதலால், $\mu = Gm_0$ என்றே கொள்ளலாம். மேலும் $m_0 = 1$ என்றும் எடுத்துக் கொள்ளுதல் வழக்கம்.

3·8 ஆய்லர் சூத்திரம் (Euler's formula)

ஒரு பரவளையப்பாதையில் சூரியனைச் சுற்றிச் செல்லும் ஓர் விண் பொருளுக்கு, t, t' என்ற இரு நேரங்களில் சூரியனிலிருந்து தூரங்கள் r, r' என்க. இவ்விரு இடங்களுக்கிடையேயுள்ள தூரம் s எனில், r, r', sஐ t, t' இடன் தொடர்புப் படுத்தும் சூத்திரம் ஒன்று பரவளைய இயக்கத்தில் மிக முக்கியமானது. இதனை ஆய்லர் சூத்திரம் என்று குறிப்பிடுவர். இதனை இப்போது தருவிப்போம்.



படம் 3.7

$$r = q(1+z^2),\ r' = q(1+z'^2)$$

$T=\sqrt{\mu}\,(t'-t)$ எனில்,

$$z+\frac{z^3}{3} = \sqrt{\frac{\mu}{2q^3}}\,(t-t_0),$$

$$z'+\frac{z'^3}{3} = \sqrt{\frac{\mu}{2q^3}}\,(t'-t_0)$$

ஆதலால் $3\,(z'-z)+z'^3-z^3 = \dfrac{3T}{\sqrt{2q^3}}$ .... (40)

$r+r'+s=2S$ என்க. அப்போது $r+r'-s=2(S-s)$.

$PP'm_0$ முக்கோணத்திலிருந்து, திரிகோணமிதி சூத்திர மொன்றின்படி

$$\cos\frac{w'-w}{2} = \pm\sqrt{\frac{S\,(S-s)}{rr'}} \qquad \text{...... (41)}$$

இங்கு $w'-w>180$ எனில் குறைக்குறி (negative sign) யும், $w'-w<180$ எனில் மிகைக்குறியும், (positive sign) இடப்பட வேண்டும். மேலும்

$$\cos\frac{w'-w}{2} = \frac{\tan\frac{w}{2}\tan\frac{w'}{2}+1}{\sqrt{1+\tan^2\frac{w}{2}}\sqrt{1+\tan^2\frac{w'}{2}}} = \frac{zz'+1}{\sqrt{1+z^2}\sqrt{1+z'^2}}$$

$$= \frac{q\,(1+zz')}{\sqrt{rr'}} \qquad (42)$$

(41) ஐயும் (42) ஐயும் ஒப்பிட,

$$(1+zz') = \pm\frac{\sqrt{S(S-s)}}{q}$$

இப்போது $3(z'-z)+z'^3-z^3=(z'-z)\,(3+z^2+z'^2+zz')$

$$= \sqrt{1+z^2+1+z'^2-2\,(1+zz')}\ (1+z^2+1+z'^2+1+zz')$$

$$=\sqrt{\frac{r}{q}+\frac{r'}{q}\mp\frac{2\sqrt{S(S-s)}}{q}}\left\{\frac{r}{q}+\frac{r'}{q}\pm\frac{\sqrt{S\,(S-s)}}{q}\right\}$$

$$=\frac{1}{q^{3/2}}\sqrt{\frac{r+r'+s}{2}+\frac{r+r'-s}{2}\mp 2\sqrt{S\,(S-s)}}$$

$$\times\left\{\frac{r+r'+s}{2}+\frac{r+r'-s}{2}\pm\sqrt{S\,(S-s)}\right\}$$

$$= \frac{1}{q^{3/2}} \sqrt{S+(S-s)\mp 2\sqrt{S(S-s)}}\left\{S+(S-s)\pm\sqrt{S(S-s)}\right\}$$

$$= \frac{1}{q^{3/2}} \left\{\sqrt{S} \mp \sqrt{S-s}\right\} \left\{S + (S-s) \pm \sqrt{S(S-s)}\right\}$$

$$= \frac{1}{q^{3/2}} \left\{S^{3/2} \mp (S-s)^{3/2}\right\}$$

இதனை (40)ல் பிரதியிட,

$$S^{3/2} \mp (S-s)^{3/2} = \frac{3T}{\sqrt{2}} \tag{43}$$

இதுவே ஆய்லரின் சூத்திரமாகும்.

3.9 அதிபரவளை இயக்கம்

அதிபரவளைப் பாதையின் சமன்பாடு $r = \dfrac{h^2\mu}{1+e\cos(\theta-\epsilon)}$

ஆகும். இதனை $r = \dfrac{a(e^2-1)}{1+e\cos w}$ (44)

என்று கொண்டால், $2a=$ குறுக்கு அச்சின் நீளம்.

இங்கு $h^2=\mu a(e^2-1)$ (45)

அதிபர வளைய இயக்கமும் காலவட்ட இயல்பு கொண்டதல்ல. இங்கு, கொடுத்த நேரத்தில் r ஐக் காண, பின்வருமாறு செயல் படுவோம்.

$$r^2\frac{dw}{dt} = h \text{ என்பதால், } \frac{dw}{dt} = \frac{h}{r^2}$$

அதிபரவளையத்தில் வேகம்

$$= \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{dw}{dt}\right)^2} = \sqrt{\mu\left(\frac{2}{r}+\frac{1}{a}\right)}$$

எனவே $\left(\dfrac{dr}{dt}\right)^2 = \mu\left(\dfrac{2}{r}+\dfrac{1}{a}\right) - \dfrac{h^2}{r^2}$

$$= \mu\left(\frac{2}{r}+\frac{1}{a}\right) - \frac{\mu a(e^2-1)}{r^2}$$

$$= \frac{\mu}{ar^2}\left\{2ra + r^2 - a^2e^2 + a^2\right\}$$

$$= \frac{n^2a^2}{r^2}\left\{(a+r)^2 - a^2e^2\right\} \tag{46}$$

இங்கு $n^2 a^3 = \mu$. இப்போது F எனும் எண்ணை,

$$r = a\,(e \cosh F - 1) \tag{47}$$

என்றவாறு கொள்க. $dr = a\,e\,\sinh F\,dF$ என்று (46)ல் பிரதியிட

$$a^2 e^2 \sinh^2 F \left(\frac{dF}{dt} \right)^2 = \frac{n^2 a^2 \{ a^2 e^2 (\cosh^2 F - 1) \}}{a^2 (e \cosh F - 1)^2}$$

எனவே $(e \cosh F - 1)\, dF = n\, dt$

$\therefore \quad e \sinh F - F = n\,(t - t_0)$

$n\,(t - t_0)$ ஐ M என்று எழுதினால்,

$$M = e \sinh F - F \tag{48}$$

இது கெப்ளரின் சமன்பாடு போன்றது. கொடுத்துள்ள Mக்கு இசைவாக இச்சமன்பாட்டிற்கு ஒரேயொரு தீர்வு உள்ளது. F ஐ அறிந்தவுடன் (47)லிருந்து r கணக்கிடப்படும்; பிறகு (44) லிலிருந்து w ஐப் பெறலாம் அல்லது

$$\tan \frac{w}{2} = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}}\, \tanh \frac{F}{2} \tag{49}$$

என்ற உறவை நிறுவி, இதனைப் பயன்படுத்தி நேரிடையாக wஐக் கணக்கிடலாம்.

எரிமீன்கள் (Meteors) பூமியின் ஈர்ப்பு மண்டலத்துக்குள் நுழைந்த பின்னர் அதிபரவளையப் பாதையில் செல்கின்றன. இவற்றின் ஒரு குவியம் பூமியின் மையமாகும்.

3·10 அலகுகள்

பரிசோதனைச் சாலையில் பல நுணுக்கமான காட்சிப் பதிவுகளைச் செய்து அவற்றின் மூலம்

$G = (6{\cdot}668 \pm 0{\cdot}005) \times 10^{-8}$ டைன்-செமீ.^{2}/கிராம்^{2} என்று கணக்கிட்டிருக்கிறார்கள். இந்த அளவின் நுட்பம் (Precision) சுமார் 1300ல் ஒன்று. வான இயல் அளவுகளுக்கு இந்த நுட்பம் போதாது. எனவே, வேறு அளவை முறையில் k என்னும் மற்றொரு எண்ணை வரையறுத்திருக்கிறார்கள். k ஐ, கவுசு மாறிலி (Gaussian constant) என்று குறிப்பிடுகிறார்கள்.

$$k = 0{\cdot}017\;202\;098\;95 \tag{50}$$

கவுசு இதனைக் கணக்கிட்ட முறை பின்வருமாறு: பூமியானது சூரியனைச் சுற்றிவரும் காலம் T, அதன் நீள்வளையப் பாதையின்

நெட்டச்சில் பாதி (சராசரித் தூரம்) a எனில், $T = \dfrac{2\pi\, a^{3/2}}{\sqrt{G(m+m_0)}}$

என்று நாம் அறிவோம். சூரியனின் திணிவை ஒரு அலகு என்று கொண்டால், சந்திரன் உள்பட பூமியின் திணிவு $\dfrac{1}{354710}$ என்று கவுசு எடுத்துக்கொண்டார். மேலும், தூரத்தை அளக்கும் அலகு, பூமியின் நீள்வளையப் பாதையின் நெட்டச்சில் பாதி என்றும் கொண்டார். இதனையே நாம் வான இயல் அலகு (Astronomical Unit) என்று குறிப்பிடுகிறோம். காலத்தை அளக்கும் அலகு, சராசரி ஞாயிற்று நாள் (mean solar day) என்றும் கவுசு எடுத்துக் கொண்டார். இதன்படி

$$T = 365{\cdot}256\ 3835$$

என்று கொண்டு, $G = k^2$ என்று எழுதி, $a = 1$ என்பதால்

$$k = \frac{2\pi}{365{\cdot}2563835\sqrt{1+\frac{1}{354710}}} = {\cdot}017\ 202\ 098\ 95$$

என்று கவுசு கணக்கிட்டார்.

கவுசின் காலத்திற்குப் பின்னர், மிக நுணுக்கமான காட்சிப் பதிவுகள் மூலம் mன் மதிப்பும் Tன் மதிப்பும் இன்னும் சீராகக் கணக்கிடப்பட்டுள்ளன. இதனால் $a = 1$ என்று கொள்ளும்போது kன் தற்கால மதிப்பு (50)ல் குறிப்பிட்டதனின்று மாறுபட்டதா யிருக்கும். கவுசின் எண் ஏற்கெனவே பல இடங்களில் பயன் படுத்தப் பட்டுவிட்ட படியினால், kன் மதிப்பை (50)ல் கூறியபடியே வைத்துக் கொண்டு, அதற் கிணங்க aன் மதிப்பை மாற்றுவது என்று அனைத்து நாட்டு விஞ்ஞானிகளும் ஒத்துக்கொண்டுள்ளனர். தற்போது ஒரு மீன்வழி வருடம்

$= 365 \cdot 256\ 365\ 56 - {\cdot}000\ 000\ 11\, t$ சராசரி ஞாயிற்று நாள்கள் (t என்பது 1900க்குப் பிறகு கடக்கப்பட்ட நூற்றாண்டுகள்) என்றும், பூமி, சந்திரன் ஆகியவற்றின் மொத்தத் திணிவு $\dfrac{1}{328466}$ என்றும் கணக்கிடப்பட்டுள்ளன. எனவே தூர அலகானது மாற்றப் பட்டுள்ளது. இதன்படி, பூமிக்கும் சூரியனுக்குமுள்ள சராசரித் தூரம் 1 அல்ல, அது 1·000 000 230 வானியல் அலகுகள்.

சில கணக்கீடுகளில் k ஐ 1ஆக எடுத்துக்கொள்வது சௌகரியமாக இருக்கிறது. இதற்குக் கால அலகை மாற்ற வேண்டும். கால

அலகு இந்நிலையில் $\frac{1}{\cdot 017\,202\,098\,95} = 58{\cdot}13244087$ சராசரி ஞாயிற்று நாள்கள் ஆகும்.

மற்றும் சில கணக்குகளில் மீன்வழி வருடத்தை (siderial year)யே கால அலகாகக் கொள்கின்றனர். அப்போது $k = \frac{2\pi}{\sqrt{1+m}}$ என்று ஆகும்.

தூர அலகை கிலோமீட்டராக எடுத்துக் கொள்வதும் உண்டு. இதற்கு, முதலாவதாக, ஒரு வானியல் அலகுக்கு எத்தனை கி.மீ. என்று கணக்கிட வேண்டும். இதற்குப் பல வழிமுறைகள் கையாளப் பட்டுள்ளன. 1959ம் ஆண்டு பிரைஸ் (Price), மற்றும் பல விஞ்ஞானிகள் பல சோதனைகன் நடத்தினுர்கள். பூமியிலிருந்து ரேடியோ கதிர்களைச் சுக்கிரனை நோக்கி அனுப்பி, அவை சுக்கிரனில் பிரதிபலித்துத் திரும்பி வரும் காலத்தை அளந்தனர். சோதனைச் சாலையிலிருந்து சுக்கிரனின் மேற்பரப்பின் தூரங்கள் ·296355 வா.அ., ·303853 வா.அ. ஆக இருந்தபோது ரேடியோ கதிர்கள் சுக்கிரனுக்குச் சென்று திரும்பும் காலங்கள் முறையே 295·5065, 302·9842 செகண்டுகள் ஆக இருந்தன. இவற்றிலிருந்து, கதிர்கள் ஒரு வானியல் அலகுத் தூரத்தைக் கடக்க 498·5684 அல்லது 498·5704 செகண்டுகள் எடுத்துக் கொள்கின்றன என்பது புலப் படும். சராசரியாக இதனை 498·5694 செகண்டுகள் என்று கொள்க. ரேடியோ கதிர்கள் ஒளியின் வேகத்தில் செல்கின்றன. ஒளி வேகம் $2{\cdot}997923 \times 10^5$ கி.மீ./செகண்டு. இதனுல்

$$1 \text{ வா. அ.} = 1{\cdot}49457 \times 10^8 \text{ கி மீ.}$$

என்று அறியலாம்.

சமீப காலத்தில் பல செயற்கைத் துணைக் கோள்களை பூமியைச் சுற்றி அனுப்புகிருர்கள். இவற்றைப் பற்றிய கணக்கீடுகளில், வானியல் அலகு மிகப் பெரிய அலகாகிறது; அதனுல் அதனைப் பயன்படுத்துவதில்லை. பூமியின் நடுக்கோட்டின் ஆரத்தை (equatorial radius) இங்கு தூர அலகாக எடுத்துக் கொள்கிருர்கள். கால அலகினை, $\mu = 1$ என்று வருமாறு எடுத்துக் கொள்கிருர்கள். தற்போது கால அலகு 806.819 செகண்டுகளாகக் கொள்ளப் பட்டுள்ளது. பூமியின் நடுக் கோட்டு ஆரம் 6378270 மீட்டர்கள், இதன்படி செயற்கைத் துணைக் கோள்களின் வேக அலகு 7·905453 கி.மீ./செகண்டு, அதாவது 4·912211 மைல்/செகண்டு.

3.11 தொடக்க நிலையிலிருந்து பாதையை அறிதல்

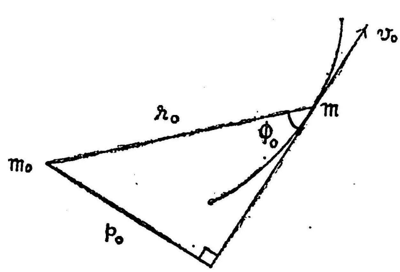
m. m_0 என்ற இரு புள்ளித் திணிவுகள் ஒன்றையொன்று தலை கீழ் வர்க்க விதிப்படி கவர்ந்து செல்லட்டும். m_0 ஐச் சார்ந்து mன் பாதையை, தொடக்க நிலை விவரங்கள் தெரிந்துள்ளபோது கணக்கிடும் முறையை இனி விவரிக்கலாம்.

m_0 ஆதிப் புள்ளியாகக் கொள்க. நேரம் $t=0$ ஆக இருக்கும் போது mன் தூரம் r_0, வேகம் v_0 என்க. $\mu=G\ (m+m_0)$, $\frac{1}{2}v^2-\frac{\mu}{r}=\alpha$ என்பதால், சாரியக்கத்தின் சக்தி $\alpha=\frac{1}{2}v_0^2-\frac{\mu}{r_0}$.

$\alpha<0$ எனில் பாதை நீள் வளையம்; $\alpha=0$ எனில் பர வளையம்; $\alpha>0$ எனில் அதிபர வளையம். பாதையின் வகை, தொடக்க வேக அளவைப் பொறுத்துள்ளதே தவிர, தொடக்க திசையைப் பொறுத்ததில்லை என்பதைக் கவனிக்க.

பாதை ஒரு நீள் வளையம் என்றால், $v^2=\mu\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right)$ என்பதால் a கணக்கிடப்படுகிறது. உடனே $\mu = n^2 a^3$ என்பதிலிருந்து n அறியப்படும். காலவட்ட நேரம், $\frac{2\pi}{n}$.

$h=vp$ என்று நாம் அறிவோம். தொடக்கப் புள்ளியில் $h=v_0 p_0 =v_0 r_0 \sin\phi_0$ எனவே h அறியப்படும். $h^2=\mu a\ (1-e^2)$ என்பதால் பிறகு e யும் கணக்கிடப்படும். a யும் e யும் பாதையின் பரிமாணத்தை (size)க் காட்டுகின்றன.



படம் 3.8

இவ்விதமே, பாதை ஒரு பரவளையமாகவோ, அதிபரவளைய மாகவோ இருக்கும்போது அதன் பரிமாணத்தைக் கணக்கிட்டறியலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 1

கால அலகு $\mu = 1$ என்றபடி அமைந்துள்ளது. ஒரு துகளின் வேகம் ·24 கிமீ/கால அலகு. அப்போது அதன் தூரம் 30 கிமீ. (m_0 இலிருந்து), இதன் திசைக்கும், துகளின் நகர் திசைக்கும் இடையேயுள்ள கோணம் 30° எனில், பாதையின் வகை யாது? அண்மைத் தூரம் யாது?

$$\text{தொடக்கத்தில் } \alpha = \tfrac{1}{2} v^2 - \frac{\mu}{r} = \tfrac{1}{2} \times \cdot 24 \times \cdot 24 - \tfrac{1}{30} = \cdot 0288$$

$$- \cdot 0333 < 0. \text{ எனவே பாதை ஒரு நீள்வளையம்.}$$

$$\tfrac{1}{2} v^2 = \mu \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{2a} \right] \text{ என்பதால் } \frac{1}{2a} = \cdot 0045$$

$$\therefore a = \frac{1}{\cdot 009} = 111 \cdot 11 \text{ கிமீ.}$$

$$h = \cdot 24 \times 30 \sin 30^\circ = 3 \cdot 6 \text{ கிமீ}^2\text{/கால அலகு.}$$

$$h^2 = \mu a (1 - e^2) \text{ என்பதிலிருந்து } e^2 = 1 - \frac{12 \cdot 96}{111 \cdot 111} = \cdot 8833$$

எனவே $e = \cdot 94$

அண்மைப் புள்ளியின் தூரம் $a(1-e) = 111 \cdot 11 \times \cdot 06 = 6 \cdot 66$ கிமீ.

எடுத்துக்காட்டு 2

செயற்கைத் துணைக்கோள் ஒன்று பூமிக்கு மேல் 600 கிமீ. உயரத்தில் கிடைத்திசையில் 8·1 கிமீ/செகண்டு வேகத்தில் பறக்கிறது. அது பூமிக்கு மிக தூரத்திலிருக்கும்போது அதன் உயரத்தைக் கணக்கிடுக. அதன் காலவட்ட நேரம் யாது?

$\mu = 1$, கால அலகு 806·819 செகண்டுகள், பூமியின் ஆரம் ($= 6378 \cdot 270$ கிமீ.) ஒரு தூர அலகு என்று கொள்க.

$$600 \text{ கிமீ. தூரம்} = \frac{600}{6378 \cdot 27} \text{ தூர அலகுகள்} = \cdot 0941 \text{ அலகுகள்.}$$

$$\text{வேகம்} = 8.1 \text{ கிமீ/செகண்டு} = \frac{8 \cdot 1}{7 \cdot 905} \text{ தூர அலகுகள்/கால அலகு}$$

$$= 1 \cdot 024 \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,}$$

எனவே $\mu=1$, $r=1{\cdot}0941$, $v=1{\cdot}024$, $\phi=90^{\cdot}$ என்ற அளவுகளுக்கு $\alpha=\frac{1}{2}v^2-\frac{\mu}{r}=\cdot5240-\cdot9137=-\cdot3897$ எனவே பாதை ஒரு நீள்வளையம் ; மேலும் $\frac{1}{2a}=\cdot3897$

$$\therefore\ a=\frac{1}{\cdot7794}=1{\cdot}285 \text{ தூர அலகுகள்.}$$

$$h=v\,r\sin\phi=1{\cdot}024\times1{\cdot}0941\sin90^\circ$$

$$\text{எனவே } 1-e^2=\frac{h^2}{\mu a}=\frac{(1{\cdot}024\times1{\cdot}0941)^2}{1{\cdot}285}=\cdot9770$$

$$\therefore\ e=\cdot1517$$

சேய்மை நிலைத்தூரம் (apogee) $= a\,(1+e)$

$= 1{\cdot}285\times1{\cdot}1517$

$= 1{\cdot}480$ தூர அலகுகள்

$= 9441$ கிமீ

இந்நிலையில் செயற்கைக் கோள் பூமிக்குமேல் சுமார் 3063 கிமீ. உயரத்தில் பறக்கும்.

$$\text{காலவட்ட நேரம்}=\frac{2\pi a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}}=2\pi\times(1{\cdot}285)^{\frac{3}{2}} \text{ கால அலகுகள்}$$

$= 9{\cdot}152$ கால அலகுகள்

$= 7382$ செகண்டுகள்

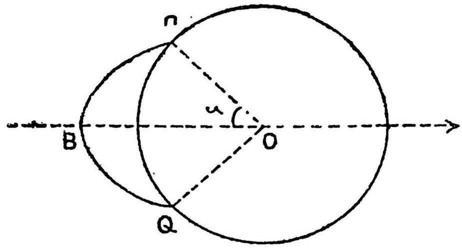
$= 123{\cdot}03$ நிமிடங்கள்.

எடுத்துக்காட்டு 3

பூமி ஒரு கோள வடிவமான கிரகம் என்க. ஒரு செயற்கைத் துணைக்கோள் பூமியில் P என்னுமிடத்திலிருந்து புறப்பட்டு, ஒரு சுற்று சுற்று முன்னரே Q என்ற புள்ளியில் பூமியில் விழுகிறது. O என்பது பூமியின் மையம், தொடக்க விசை v_0, அதன் தொடக்க திசை பூமி மட்டத்துடன் ஏற்படுத்திய கோணம் $90-\phi_0$, $\underline{|POQ}=2\alpha$ என்க. பின்வரும் சமன்பாடுகளை நிறுவுக :

$$a=\frac{1-e\cos\alpha}{1-e^2}\ ,\quad v_0^2=\frac{1-2e\cos\alpha+e^2}{1+e\cos\alpha}$$

$$\tan\phi_0=\frac{1-e\cos\alpha}{e\sin\alpha}$$



படம். 3.9

தீர்வு : பூமியின் ஆரம் $= r_0 = 1.$, $\mu = 1$ என்க.

$\angle POQ = 2\alpha$ என்பதால், படத்தில்

$\angle POB = \angle BOQ = \alpha.$

B என்பது துணைக்கோளின் சேய்மைப்புள்ளி, O அதன் குவியம். சேய்மைப் புள்ளி இருப்பதால், பாதை ஒரு நீள்வளையம் என்பது புலப்படுகிறது. பாதையின் சமன்பாடு $r = \dfrac{a(1-e^2)}{1+e\cos w}$

$w = 180-\alpha$ எனில் $r = r_0 = 1.$ எனவே

$$1 = \frac{a(1-e^2)}{1-e\cos\alpha}\text{ , அதாவது } a = \frac{1-e\cos\alpha}{1-e^2}$$

$$v^2_0 = \mu\left\{\frac{2}{r_0} - \frac{1}{a}\right\}\text{ என்பதிலிருந்து}$$

$$v_0^2 = 2 - \frac{1-e^2}{1-e\cos\alpha} = \frac{1-2e\cos\alpha+e^2}{1-e\cos\alpha}$$

அடுத்த படியாக, $h = v\,r\sin\phi$, $h^2 = \mu a(1-e^2)$. இதனால்

$$v_0^2.\ 1.\sin^2\phi_0 = 1.\ \frac{1-e\cos\alpha}{1-e^2}\ .(1-e^2)$$

$$\therefore \sin^2\phi_0 = \frac{1-e\cos\alpha}{v_0^2} = \frac{(1-e\cos\alpha)^2}{1-2e\cos\alpha+e^2}$$

$$= \frac{(1-e\cos\alpha)^2}{(1-e\cos\alpha)^2+(e\sin\alpha)^2}$$

$$\therefore \tan\phi_0 = \frac{1-e\cos\alpha}{e\sin\alpha}$$

பயிற்சி

1. மைய விசையின்கீழ் நகரும் துகளுக்கு

$$\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right\} + V(r) = C$$

என்று காட்டுக. இங்கு $V = \int^r f(r)\,dr$

$r^2 \dfrac{d\theta}{dt} = h$ எனில், இதிலிருந்து

$$\frac{h^2}{2r^2} + V(r) + \frac{1}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = C$$

என்று தருவிக்க.

$\left(\dfrac{dr}{dt}\right)^2$ என்பது குறையெண்ணாக இருக்காது என்பதன் மூலம், பாதையின் கவியங்களை (apses)க் கண்டுபிடிக்க ஒரு சூத்திரத்தை வருவிக்க.

2. மைய விசை $F_r = -\,m\left\{\dfrac{\mu}{r^2} + \dfrac{\mu'}{r'^8}\right\}$, $\mu r^1 < \dfrac{1}{10}\mu$ எனில், பாதையின் சமன்பாட்டை $r = \dfrac{k}{1 + e\cos\beta\theta}$ என்று எழுத முடியும் என்று காட்டுக.

3. ஐன்ஸ்டீன் சாரியக்கக் கொள்கை (Einstein's Theory of Relativity) யின் படி, கிரகங்களின் பாதையின் சமன்பாடு $u + \dfrac{d^2u}{d\theta^2} = \dfrac{\mu}{2} + \alpha u^2$ என்கிறது. இங்கு α மிகச் சிறிய எண் ; $\alpha = \dfrac{3\mu}{c^2}$, c என்பது ஒளியின் வேக அளவு, $\alpha^2, \alpha^3,\ldots$ என்பனவற்றைத் தள்ளிவிடலாம் என்று கொண்டு, படிப்படியாகத் தோராயத் தீர்வுகள் காண்க. பாதையின் சமன்பாட்டை

$$\mu = \frac{\mu}{h^2}\left\{1 + e\cos(\theta-\alpha)\right\} + \frac{\alpha\mu^2}{h^4}\left\{(1+\tfrac{1}{2}e^2) + e\theta\sin(\theta-\alpha) - \tfrac{1}{6}e^2\cos 2(\theta-\alpha)\right\}$$

என்று எழுத முடியுமென்று காட்டுக.

(குறிப்பு : இங்கு $\dfrac{\alpha\mu^2}{h^4}e\,\theta\sin(\theta-\alpha)$ என்ற உறுப்பு, சுற்றுகள் அதிகமாக அதிகமாக வளர்ந்து வரும் எண். இதனால் புதனின் அண்மைப் புள்ளியின் கோணதூரம் மெல்ல மெல்ல, ஆனால் திடமாக, வளர்ந்து வருவது புலனாகிறது. ஒரு நூற்றாண்டில் இவ்வளர்ச்சி 43 செகண்டுகள் என்று கணக்கிட்டிருக்கிறார்கள்).

4. $F_r = \dfrac{8a^2h^2r}{(a^2-c^3+r^2)^3}$ எனில், a ஆரமுள்ள ஒரு வட்டப்பாதை ஏற்படலாமென்று காட்டுக.

5. நீள்வளையப் பாதைக்குப் பின்வரும் உறவுகளை நிறுவுக : இங்கு $e = \sin\phi$ என்று கொள்க.

(i) $$\frac{1-e^2}{1+e\cos w} = 1-e\cos E$$

(ii) $$r\cos^2\frac{w}{2} = a\,(1-e)\cos^2\frac{E}{2}$$

(iii) $$r\sin^2\frac{w}{2} = a\,(1+e)\sin^2\frac{E}{2}$$

(iv) $$\tan\frac{w}{2} = \tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\phi}{2}\right)\tan\frac{E}{2}$$

(v) $$\tan\frac{E}{2} = \tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\phi}{2}\right)\tan\frac{w}{2}$$

(vi) $$\sin w = \frac{\sqrt{1-e^2}\sin E}{1-e\cos E}$$

(vii) $$\sin E = \frac{\sqrt{1-e^2}\sin w}{1+e\cos w}$$

(viii) $$\cos E = \frac{e+\cos w}{1+e\cos w}$$

(ix) $$\frac{dr}{dt} = \mu\frac{e\sin w}{h} = \frac{nae\sin E}{1-e\cos E}$$

6. e மிகச் சிறிய எண், e^2 ஐ நிறுத்திக்கொண்டு. e^3, e^4,... முதலியவைகளைத் தள்ளிவிடலாம் எனில், $\tan E = \sec\phi\tan 2K$ என்று காட்டுக. இங்கு $e = \sin\phi$, $\tan K = \tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\phi}{2}\right)\tan\frac{M}{2}$

7. இரட்டை மீன் (binary) களில் ஒரு சோடியின் திணிவுகள் $m_1 . m_2$; அவை ஒன்றைச் சுற்றி மற்றொன்று நீள் வட்டப்பாதையில் செல்கின்றன. இவற்றிற் கிடையில் மீப்பெரு தூரம் D, மீச்சிறு தூரம் d, காலவட்ட நேரம் T எனில், அவற்றின் சுழற்சியின் உந்தம்

$$\frac{\pi}{T}\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\sqrt{Dd}\,(D+d)$$

என்று காட்டுக.

8. வியாழனுக்குக் கானிமீடு (Ganymede) என்று பெயருள்ள ஒரு துணைக் கோள் உண்டு. இதன் காலவட்ட நேரம் 7·15455 நாள்கள். வியாழனுக்கும் துணைக் கோளுக்கு மிடையேயுள்ள சராசரித்தூரம் ·0071 559 வா. அ. எனில், வியாழனின் திணிவைச் சூரியனின் திணிவுடன் ஒப்பிடுக.

9. கீழ்வரும் விவரங்களுக்கு, கெப்ளரின் சமன்பாட்டைத் தீர்.

(i) $M = 50°$, $e = ·4$ (விடை 71·77 டிகிரிகள்)
(ii) $M = 60°$ $e = ·1$ (விடை 65·20 டிகிரிகள்)
(iii) $M = 140$, $e = ·2$ (விடை 146·35 டிகிரிகள்)
(iv) $M = 235$, $e = ·3$ (விடை 223·23 டிகிரிகள்)

10. $M = w-2\,e\sin w+\frac{3}{4}\,e^2\sin 2\,w-\dfrac{e^3}{3}\sin 3\,w+\ldots\ldots$ என்றும்,

$$w - M=2\,e\sin M + \frac{5e^2}{4}\sin 2\,M + \frac{e^3}{12}\,(13\sin 3\,M-3\sin M)+\ldots$$

என்றும் காட்டுக.

11. $t_0=0$ எனில்,

(i) $r=a\,(1-e\cos n\,t + e^2\sin^2 nt+\ldots\ldots)$
$= a\,[1+\frac{1}{2}\,e^2 - e\cos M - \frac{1}{2}\,e^2\cos 2\,M+\ldots\ldots]$

(ii) $\dfrac{r^2}{a^2} = 1 + \dfrac{3}{2}\,e^2 - 2\,e\cos M - \dfrac{e^2}{2}\cos 2\,M+\ldots\ldots$

என்பனவற்றை நிறுவுக,

12. $\sin w = \dfrac{\sqrt{1-e^2}}{e}\,\dfrac{d}{d\,M}\left(\dfrac{r}{a}\right)$ என்று காட்டுக. இதனின்று, 11 (i) ஐப் பயன்படுத்தி, $\sin w=2\sqrt{1-e^2}\,\left\{\left(\dfrac{1}{2}-3\,\dfrac{e^2}{16}\right)\sin M + \dfrac{e}{2}\sin 2\,M + \dfrac{9}{16}\,e^2\sin 3\,M+\ldots\ldots\right\}$

என்று காட்டுக.

13. $\cos E$ க்கு Mல் ஒரு தொடரை வருவிக்க.

14. $\xi=\cos w+i\sin w$, $\eta=\cos E+i\sin E$,

$\beta=\tan\dfrac{\phi}{2}=\dfrac{1-\sqrt{1-e^2}}{e}$ என்க. பின் வருவனவற்றை நிருபிக்க :

(i) $\dfrac{\xi-1}{\xi+1}=\dfrac{1+\beta}{1-\beta}\cdot\dfrac{\eta-1}{\eta+1}$ (ii) $\xi=\dfrac{\eta\,(1-\beta\,\eta^{-1})}{1-\beta\,\eta}$

இருபுறமும் மடக்கை எடுத்து, $f = E + 2\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\beta^n}{n}\sin n\,E$

என்று காட்டுக.

15. நீள்வளையப் பாதையில் $h\,\dfrac{dr}{dt}=k^2\,(m+m_0)\sin w$

என்று காட்டுக.

16. (மூல்டன் முறை: (Moulton Method) பின்வரும் வழியில் சமன்பாடு (40) ஐத்தீர்க்க முடியுமெனக் காட்டுக:

$$\cot s=\sqrt{\frac{\mu}{8q^3}}\,(t-t_0)\,,\ \cot s'=\left(\cot\frac{s}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\,,\ \tan\frac{w}{2}=2\cot 2\,s'$$

17. $e\sinh F-F=M$ என்ற சமன்பாட்டில் M தரப்பட்டிருந்தால் Fக்கு ஒரேயொரு தீர்வுதான் இருக்கும் என்று காட்டுக.

18. $e \sinh F - F = M$ என்ற சமன்பாட்டினை Fக்குத் தீர்க்கும் முறையொன்றினை விவரிக்க.

19. அதிபரவளைய இயக்கத்தில் $\tan \frac{w}{2} = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} \tanh \frac{1}{2} F$ என்று காட்டுக.

20. அதிபரவளை இயக்கத்திற்குப் பின்வரும் சமன்பாடுகளை நிறுவுக :

(i) $r \cos^2 \frac{w}{2} = a(e-1) \cosh^2 \frac{F}{2}$

(ii) $r \sin^2 \frac{w}{2} = a(e+1) \sinh^2 \frac{F}{2}$

(iii) $\cos w = \frac{e - \cosh F}{e \cosh F - 1}$ (iv) $\cosh F = \frac{e + \cos w}{1 + e \cos w}$.

(v) $\sin w = \frac{\sqrt{e^2 - 1} \sinh F}{e \cosh F - 1}$ (vi) $\sinh F = \frac{\sqrt{e^2 - 1} \sin w}{1 + e \cos w}$

21. $F = \log_e \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{f}{2}\right)$ என்க. $r = a(e \sec f - 1)$ என்றும்,

$\tan \frac{w}{2} = \cot \frac{\phi}{2} \tan \frac{f}{2}$ என்றும் காட்டுக. இங்கு $\sec \phi = e$.

22. $F_r = \frac{\mu}{r^2}$, ஆனல் இது கவர்விசையன்று, தள்ளுவிசை (repulsive force) என்க. பாதை ஒரு அதிபரவளையம் என்று காட்டுக, வானியலில் இத்தகைய இயக்கத்திற்சோர் எடுத்துக்காட்டு தருக.

23. ஒரு துகள் (m_0) மற்றொரு துகளி (m_0)னல் $\frac{\mu}{r^2}$ விதிப்படி கவரப்படுகிறது. தொடக்க நிலையில் mன் தூரம் r_0, வேகம் v_0, வேகத்தின் திசை ஆரத்தின் திசையுடன் ϕ_0 கோணத்தை ஏற்படுத்துகிறது. $\frac{1}{2} v_0^2 > \frac{\mu}{r_0}$ எனில் பாதை ஒரு அதிபர வளையம் என்று காட்டுக. பாதையின் பரிமாணங்களைக் (dimensions) காண்க.

$\frac{1}{2} v_0^2 = \frac{\mu}{r_0}$ எனில் பாதை ஒரு பரவளையம் என்று காட்டுக. அதன் செவ்வகலத்தைக் கணக்கிடுக.

24. $\mu = 1$ என்க. பின் வரும் நிலைகளுக்கு, பாதைகளின் வகைகளைக் காண்க. ஒவ்வொன்றிலும் a, e, q, ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுக:

	r	v	ϕ
(i)	1	1	45°
(ii)	2	1	30°
(iii)	2	1	45°
(iv)	10	$\frac{1}{4}$	90°
(v)	12	$\frac{1}{2}$	60°

25. ஒரு செயற்கைக்கோள் பூமி மட்டத்திற்கு 500 கி மீ உயரத்தில், பூமி மட்டத்திற்கு 2° மேல் நோக்கி, 7·92 கிமீ/செகண்டு வேகத்தில் பறந்து கொண்டிருந்தது. அதன் அண்மை நிலைத் தூரம், காலவட்ட நேரம் (உண்டெனில்), மையவகற்சி எண் ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுக.

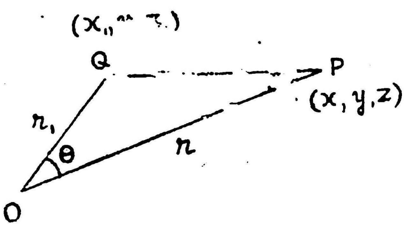
26. பூமியின் ஒரு செயற்கைக் கிரகத்தின் தப்பிச் செல்லும் வேகம் 11·18 கிமீ/ செகண்டு என்று கணக்கிடுக.

27. ஒரு செயற்கைக் கோள் பூமியிலிருந்து கிடைத் திசையில் கிளம்பியது. அதன் சேய்மைத்தூரம் சந்திரனுடைய தூரத்திற்குச் சமமாக இருக்க வேண்டுமாயின், அதன் தொடக்க வேகத்தினை கி மீ/செகண்டில் கண்டுபிடிக்க. (சந்திரனுடைய தூரம் பூமியிலிருந்து 384000 கி மீ என்று கொள்க).

4. பொது வடிவங்களின் விசைத் தேக்கம்

4.1 லஜாந்திரே சார்புகள் (Legendre Functions)

O என்பது ஒரு நிலையான புள்ளி. Q என்பது (x_1, y_1, z_1) P என்பது (x, y, z) என்க. Q ல் m திணிவுள்ள ஒரு துகள் இருக்கட்டும். இதன் ஈர்ப்பு விசைத் தேக்கம் P ல் $\frac{Gm}{QP}$. இதனை $-V$ என்போம்.



படம் 4·1

$$-V = \frac{Gm}{QP} = \frac{Gm}{\{r_1^2+r^2-2r_1 r\cos\theta\}^{1/2}} = \frac{Gm}{r\left\{1-\frac{2r_1}{r}\cos\theta+\frac{r_1^2}{r^2}\right\}^{1/2}}$$

இங்கு $OQ=r_1$, $OP=r$, $\angle POQ=\theta$.

$$\frac{r_1}{r} = h, \ \cos\theta = \mu \text{ என்க.}$$

$$(1-2\mu h+h^2)^{-1/2} = 1+\tfrac{1}{2}(2\mu h-h^2)+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}(2\mu h-h^2)^2+\cdots$$

$$+\frac{1, 3, 5\cdots(2n-1)}{2, 4, 6\cdots\ \ 2n}(2\mu h-h^2)^n+\cdots \text{கந்தழிக்கு}$$

இதில் hன் வெவ்வேறு அடுக்குகளின் குணகங்களைப் பொறுக்கி எழுத,
$(1-2\mu h+h^2)^{-1/2} = 1+\mu h+\frac{1}{2}(3\mu^2-1)h^2+\cdots$ கந்தழிக்கு

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\mu)h^n$$

என்க. இங்கு $P_n(\mu)$ என்பது μல் அடுக்கு கொண்ட ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை. nன் சில மதிப்புகளுக்கு $P_n(\mu)$ன் கோவைகள் அடியில் தரப்பட்டுள்ளன.

$$P_0\mu = 1, \qquad P_4(\mu) = \frac{1}{8}(35\mu^4 - 30\mu^2 + 3)$$

$$P_1(\mu) = \mu, \qquad P_5(\mu) = \frac{1}{8}(63\mu^5 - 70\mu^3 + \mu)$$

$$P_2(\mu) = \frac{1}{2}(3\mu^2 - 1), \qquad P_6(\mu) = \frac{1}{16}(231\mu^6 - 315\mu^4 + 105\mu^2 - 5)$$

$$P_3(\mu) = \frac{1}{2}(5\mu^3 - 3\mu), \qquad P_7(\mu) = \frac{1}{16}\,429\mu^7 - 693\mu^5 + 315\mu^3 - 35\mu)$$

பொதுவில்

$$P_n(\mu) = \frac{\underline{|2n}}{2n\,(\underline{|n})^2}\left\{\mu^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}\mu^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4\cdot(2n-1)(2n-3)}\mu^{n-4} + \cdots\right\}$$

இதன் கடைசி உறுப்பு,

n ஒற்றை எண்ணுகில், μஐக் கொண்டதாக இருக்கும். (2)

n இரட்டை எண்ணுகில் மாறிலி எண்ணுக இருக்கும்.

$P_n(\mu)$ன் வடிவத்தை மற்றொரு சூத்திரத்திலிருந்தும் காணலாம். இதற்கு ராட்ரிகியூ சூத்திரம் (Rodrigues Formula) என்று பெயர்.

இதன்படி,

$$P_n(\mu) = \frac{1}{2^n\,\underline{|n}} \cdot \frac{d\mu^n}{d\mu^n}\left\{(\mu^2 - 1)^n\right\}$$

எடுத்துக் காட்டாக, $P_2(\mu) = \dfrac{1}{2^2\,\underline{|2}}\,\dfrac{1}{d\mu^2}\left\{\mu^2 - 1)^2\right\}$

$$= \frac{1}{8}\,\frac{d}{d\mu}\left\{2(\mu^2 - 1)\cdot 2\mu\right\} = \frac{1}{2}(3\mu^2 - 1)$$

$P_n(\mu)$ என்பன லஜாந்திரே சார்புகள் அல்லது லஜாந்திரே பல்லுறுப்புக் கோவைகள் எனப்படும்.

4·2 பொது வடிவங்களின் விசைத் தேக்கம்

பொது வடிவமுள்ள ஒரு பொருளுக்கு, அதன் வெளியேயுள்ள ஒரு புள்ளியில் அதன் ஈர்ப்பு விசைத் தேக்கத்தை அறிய வேண்டும் என்க. O என்பது அப்பொருளின் திணிவு மையம் (centre of mass); Q என்பது அதன் ஒரு புள்ளி என்க. Oஐ ஆதி புள்ளியாகவும், O வழியே செல்லும் முக்கிய நிலைம அச்சுக்களை அச்சுக்களாகவும்

கொள்க. Q என்பது $(x_1\ y_1\ z_1)$, P என்பது $(x,\ y,\ z)$ எனில், Qல் உள்ள dM என்ற சிறிய துகளுக்கு Pல் உள்ள ஈர்ப்பு விசைத்

$$\text{தேக்கம்} = \frac{GdM}{\sqrt{r^2-2rr_1\cos\phi+r_1^2}}$$

இங்கும் முன்போலவே, $OP=r$, $OQ=r_1$ ஆனால் $\underline{|POQ} = \phi$

$$\text{இவ்விசைத் தேக்கம்} = \frac{GdM}{r}\left\{1-\frac{2r_1}{r}\cos\phi+\frac{r_1^2}{r^2}\right\}^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{GdM}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r_1}{r}\right)^n P_n(\cos\phi)$$

பொருளின் மொத்த ஈர்ப்பு விசைத் தேக்கம், இதனைத் தொகையிட்டு பெறப்படும். Pல் இப் பொருளின் மொத்த ஈர்ப்பு விசைத் தேக்கம் V எனில்,

$$-V = \int\frac{GdM}{r}\left\{1+\frac{r_1}{r}\cos\phi+\tfrac{1}{2}(3\cos^2\phi-1)\left(\frac{r_1}{r}\right)^2+\cdots\right\}$$

$$= \frac{GM}{r}+\frac{G}{r^2}\int r_1\cos\phi\,dM+\frac{G}{2r^3}\int(3\cos^2\phi-1)\,r_1^2dM$$

$$+\cdots+\frac{G}{r^{n+1}}\int P_n(\cos\phi)r_1^n\,dM+\cdots \text{ கந்தழிவரை} \qquad (3)$$

இங்கு M என்பது பொருளின் மொத்தத் திணிவு. OPன் திசைக் கொசைன்கள் (direction cosines) l, m, n எனில்,

$$\cos\phi = \frac{lx_1+my_1+nz_1}{1\cdot r_1}$$

O என்பது திணிவு மையம் என்பதால்

$$\int x\,dM=\int y\,dM=\int z\,dM=0$$

எனவே $\int r_1\cos\phi\,dM=0$.

அடுத்தபடியாக, A, B, C என்பன முக்கிய நிலைமச் சுழல் திறன்கள் எனில், $A=\int(y^2+z^2)\,dM$, $B=\int(z^2+x^2)dM$, $C=\int(x^2+y^2)dM$
எனவே $\int x^2dM=\frac{1}{2}\int\{(x^2+z^2)+(x^2+y^2)-(y^2+z^2)\}\,dM$

$$= \tfrac{1}{2}(B+C-A).$$

மேலும் $(3\cos^2\phi-1)\,r_1^2 = 3\,(r_1\cos\phi)^2-r_1^2$

$$= 3\,(lx_1+my_1+nz_1)^2-(x_1^2+y_1^2+z^2)$$

$$= 3\,(l^2x_1^2+m^2y_1^2+n^2z_1^2)-(x_1^2+y_1^2+z_1^2)$$

$$+6\,(mny_1z_1+nlz_1x_1+lmx_1y_1)$$

எனவே $\int (3\cos^2\phi - 1)\, r_1^2\, dM = \frac{3l^2}{2}(B+C-A) + \frac{3m^2}{2}(C+A-B)$

$$+ 3\frac{n^2}{2}(A+B-C) - \tfrac{1}{2}\Sigma(A+B-C) + 6\times 0$$

$$= A+B+C-3(Al^2+Bm^2+Cn^2) \quad [\text{ஏனெனில் } l^2+m^2+n^2=1]$$

இவற்றை (3) ல் பிரதியிட,

$$\therefore \; -V = \frac{GM}{r} + \frac{G}{2r^3}[A+B+C-3(Al^2+Bm^2+Cn^2]$$

$$+ \sum_{n=3}^{\infty} \frac{G}{r^{n+1}} \int r_1^n P_n \left(\frac{lx_1+my_1+nz_1}{r_1}\right) dM \qquad (4)$$

இதுவே Vன் வடிவம் ஆகும். Vஐ அறிந்தவுடன், திசை வகைக் கெழு என்பதன் மூலம், கொடுத்துள்ள திசையில் அப்பொருளின் ஈர்ப்பு சக்தியின் கூறுதனை அறிய முடிகிறது.

OPயைப் பொறுத்து அப்பொருளின் நிலைமத்திருப்புத் திறன் I எனில், $I = Al^2 + Bm^2 + Cn^2$. எனவே Vன் வடிவில், $\frac{G}{2r^3}$ன் குணகத்தை $A+B+C-3I$ என்று எழுதுவது வழக்கம்.

4.3 மகல்லாவின் சூத்திரம்

கொடுத்துள்ள பொருளுக்கு ஒரு சமச்சீர் அச்சு இருப்பதாகக் கொள்க. இவ்வச்சினை Z அச்சாக எடுத்துக்கொள்க.

இப்போது $A=B$, எனவே

$$\begin{aligned} A+B+C-3(Al^2+Bm^2+Cn^2) &= 2A+C-3\{A(l^2+m^2)+Cn^2\} \\ &= 2A+C-3A(1-n^2) - 3Cn^2 \\ &= -A+3An^2+C-3Cn^2 \\ &= (C-A)(1-3n^2) \\ &= -(C-A)(3n^2-1) \\ &= -(C-A)(3\cos^2\theta - 1) \end{aligned}$$

இங்கு $\theta = \angle ZOP$. எனவே (4)ம் சமன்பாடு

$$-V = \frac{GM}{r} - \frac{G}{2r^3}(C-A)(3\cos^2 O - 1) +$$

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{G}{r^{n+1}} \int r_1^n P_n \left(\frac{lx_1+my_1+nz_1}{r_1}\right) dM \qquad (5)$$

வான இயலில், இரு கோள்களுக்கிடையே ஈர்ப்பு விசையைக் கணக்கிடுகையில், ஒரு கோளின் நீள அளவுகள் r-உடன் ஒப்பிடுகையில் மிகச் சிறியனவாக இருக்கின்றன, மேலும் கோள்கள் பொதுவில் கோளவடிவில் இருப்பதால் $A+B+C-3I$ ஆனது மிகச் சிறிய எண்ணுகிறது. இக் காரணங்களினால் பொதுவில் $V=-\frac{GM}{r}$ என்றே கொள்ள முடிகிறது. ஆயினும், சில கோள்கள் முழுக் கோளங்களாக இருக்கவில்லை. அத்தகைய கோள்களுக்குத் துணைக் கோள்களின் மீதான விசையைக் கணக்கிடுகையில் இரண்டாம் உறுப்பு முக்கியம் வாய்ந்ததாக அமைகிறது. மேலும் பிற்போக்கு (Precession) பற்றிய ஆராய்ச்சியிலும் இந்த உறுப்பு பயன்படுகிறது. மூன்றுவது நான்காவது உறுப்புகள் செயற்கைத் துணைக் கோள்களைப் பற்றிய ஆராய்ச்சியிலும், கோளின் மிக அருகில் ஈர்ப்புச் சக்தியைக் கணக்கிடுகையிலும் மட்டுமே பயன்படுகின்றன. அப்போதும் மற்ற உறுப்புகளின் முக்கியத்துவம் குறைந்துகொண்டே செல்கிறது.

எனவே, வெகு தொலைவிலுள்ள ஒரு புள்ளியில், கோள வடிவிலில்லாத ஒரு பொருளின் ஈர்ப்புவிசைத் தேக்கத்தை

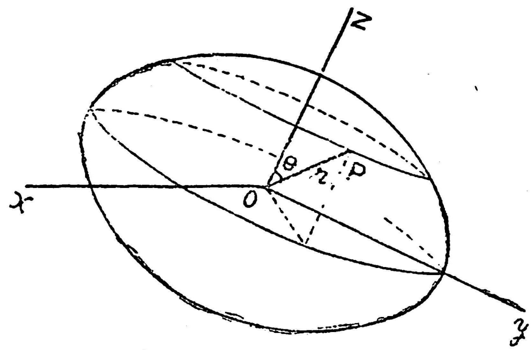
$$V=-\frac{GM}{r}-\frac{G}{2r^3}(A+B+C-3I) \qquad (6)$$

என்று கொள்ளலாம். இந்த உண்மையை மகல்லா (Maccullagh) சூத்திரம் என்று குறிப்பிடுவர்.

4·4 சுழற்சியினால் ஏற்படும் மாற்றங்கள் : கிளெயிராவின் (Clairaut's) சமன்பாடு

பூமியின் பரப்பின் மேலுள்ள துகள்களின் மீது தாக்கும் விசைகளை ஆராயப்புகும்போது, பூமியின் ஈர்ப்பு சக்தியை மட்டும் எடுத்துக்கொண்டால் போதாது. ஏனெனில், பூமி, தன்னைத் தானே சுற்றிக்கொண்டிருக்கிறது. இச்சுழல் வேகம் $7{\cdot}292 \times 10^{-5}$ ஆரைகள்/செகண்டு. இதனை w என்று குறிக்க. பூமியின் திணிவு மையத்தை ஆதிப்புள்ளியாகவும், சுழல் அச்சை OZ ஆகவும், OX, OY என்பன பூமியின் நடுக்கோட்டுத் தளத்திலும் எடுத்துக்கொள்க. P என்னும் புள்ளியின் தூரம் Oவிலிருந்து r என்க. $\angle ZOP=\theta$ எனில், பூமியின் சுழற்சியினால் Pன் மீது தாக்கும் மைய விலக்கு விசையின் (centrifugal force) தேக்கம் $U=-\frac{1}{2}w^2r^2\sin^2\theta$ $=\frac{1}{2}w^2r^2(\cos^2\theta-1)$ ஆகும். ஒரு துகளின் மீது தாக்கும் விசைகளின் மொத்த விசைத் தேக்கம் $\phi=V+U$ ஆகும். பூமியின் வடிவம் சரியான கோளமல்ல. இது ஒரு சிற்றச்சுக் கோள (oblate spheroid) வடிவம் கொண்டது. நடுக்கோட்டுத் தளத்திலுள்ள

அச்சுத் தூரம் பெரியது, துருவத்தை நோக்கிய அச்சுத் தூரம் சிறியது. ஆகவே இதன் சமன்பாடு $\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ என்று கொள்ளலாம். c க்கும் a க்கும் உள்ள வித்தியாசம் மிகச் சிறியதே.



படம் 4·2

எனவே $c = a(1-\epsilon)$ என்று எடுத்துக்கொள்க. ϵ ஐ இந்த சிற்றச்சுக் கோள உருவின் மையவகற்சி (ellipticity) எனலாம். ϵ மிகச் சிறிய எண். பூமிக்கு ϵ ன் மதிப்பு சுமார் $\frac{1}{300}$ என்று கணக்கிட்டிருக்கிறார்கள். ஆரைக் கோணதூரக் கூறுகளில் பூமியின் பரப்பின் சமன்பாடு

$$\frac{r^2 \sin^2 \theta}{a^2} + \frac{r^2 \cos^2 \theta}{a^2 (1-\epsilon)^2} = 1$$

ϵ மிகச் சிறிய எண்ணுகையால் $(1-\epsilon)^{-2} = 1+2\epsilon$ என்று கொள்ளலாம். எனவே இச்சமன்பாடு

$$r^2 \sin^2 \theta + r^2 (1+2\epsilon) \cos^2 \theta = a^2$$

அதாவது $r^2 (1+2\epsilon \cos^2 \theta) = a^2$

$$\therefore \quad r = a(1+2\epsilon \cos^2 \theta)^{-\frac{1}{2}}$$

அதாவது $r = a(1-\epsilon \cos^2 \theta)$

என்றாகும். P என்பது பூமியின் மேல் ஒரு புள்ளியெனில், அங்கு

$$\phi = V+U = -\frac{GM}{r} + \frac{G}{2r^3}(C-A)(3\cos^2\theta-1) + \tfrac{1}{2}w^2 r^2 (\cos^2\theta - 1) \qquad (7)$$

ஆகும். இதன்படி, பூமியின் மேலுள்ள ஒரு துகளின் மீது தாக்கும் விசை, OPன் திசையில்

$$g=-\frac{\partial\phi}{\partial r}=-\frac{GM}{r^2}+\frac{3G}{2r^4}(C-A)\,(3\cos\theta-1)$$
$$-w^2r\,(\cos^2\theta-1) \qquad (8)$$

பூமியின் நடுக் கோட்டில் $r=a,\ \theta=\frac{\pi}{2}$ என்பதால், அங்கு g-ன் மதிப்பு

$$g_e=-\frac{GM}{a^2}-\frac{3\,G\,(C-A)}{2a^4}+w^2a \qquad (9)$$

நடுக் கோட்டில் மைய விலக்கு விசையின் அளவு w^2a, மேலும் a தூரத்திலுள்ள ஒரு துகளின் மீது பூமியின் ஈர்ப்பு விசை $\frac{GM}{a^2}$ என்பவை நாம் அறிந்ததே. இவற்றின் விகிதத்தை ϕ என்று குறிப்பது வழக்கம்.

$$\phi=\frac{w^2a}{\frac{GM}{a^2}}=\frac{w^2a^3}{GM} \qquad (10)$$

$$\therefore\quad g_e=-\frac{GM}{a^2}-\frac{3\,G\,(C-A)}{2a^4}+\frac{GM}{a^2}\phi$$
$$=\frac{GM}{a^2}\left\{\phi-1-\frac{3\,(C-A)}{2Ma^2}\right\} \qquad (11)$$

$$\frac{3\,(C-A)}{2Ma^2}+\tfrac{1}{2}\phi=f \qquad (12)$$

என்று எழுதுக. அப்போது

$$g_e=-\frac{GM}{a^2}\left\{1+f-\tfrac{3}{2}\phi\right\} \qquad (13)$$

இப்போது $g=-\dfrac{GM}{a^2\,(1-2\epsilon\cos^2\theta)}+\dfrac{3\,G\,(C-A)\,(3\cos^2\theta-1)}{2a^4}$
$$-w^2a\,(\cos^2\theta-1) \qquad (14)$$

இங்கு (8)ல் rக்குப் பதில் இரண்டாம், மூன்றும் உறுப்புகளில் a என்று இட்டுள்ளோம். இதற்குக் காரணம் $(C-A)$யும், w^2ம் ஏற்கெனவே மிகச் சிறிய எண்கள்; எனவே $\epsilon\,(C-A)$, ϵw^2 ஆகியவை விட்டு விடப் பட்டன. இதனுல் (14)-லிருந்து

$$g=-\frac{GM}{a^2}(1+2\epsilon\cos^2\theta)+\frac{MG}{a^2}(f-\tfrac{1}{2}\phi)(3\cos^2\theta-1)$$
$$-\frac{GM}{a^2}(\phi\cos^2\theta-1)$$
$$=-\frac{GM}{a^2}\left\{1+2\epsilon\cos^2\theta-(f-\tfrac{1}{2}\phi)(3\cos^2\theta-1)+\phi(\cos^2\theta-1)\right\}$$
$$=-\frac{GM}{a^2}\left\{1+2\epsilon\cos^2\theta+f-\tfrac{1}{2}\phi-\phi+\cos^2\theta\left(-3f+\frac{3\phi}{2}+\phi\right)\right\}$$
$$=-\frac{GM}{a^2}\left\{1+f-\frac{3\phi}{2}+\cos^2\theta\left(2\epsilon-3f+\frac{5\phi}{2}\right)\right\}$$
$$=-\frac{GM}{a^2}\left\{1+f-\frac{3\phi}{2}\right\}\left\{1+\left(2\epsilon-3f+\frac{5\phi}{2}\right)\cos^2\theta\right\}$$
$$=\quad g_e\left\{1+\left(2\epsilon-3f+\frac{5\phi}{2}\right)\cos^2\theta\right\}\qquad(15)$$

4·5 கடலின் மேற்பரப்பின் வடிவம்

பூமியிலுள்ள கடலின் மேற்பரப்பில் மேற்கூறிய இருவித விசைகளும் தாக்குகின்றன. இதனுல் கடற்பரப்பின் செங்கோடு பூமியின் மையப் புள்ளி வழியே செல்வதில்லை. கடல் நீரானது சமநிலை (equilibrium)யில் இருப்பதால், அதன்மீது எந்த ஒரு புள்ளியிலும் உள்ள மொத்த விசையானது, பரப்பின் செங்கோட்டில் ஏற்பட வேண்டும்; இல்லாவிடில் தண்ணீர் பூமியின் மீது பாயத் தொடங்கும். விசைத் தேக்கத்தினுல் விளையும் விசைகள் சமவிசைத் தேக்கப் பரப்பின் (surface of equipotential) செங்கோடுகளில் அமையும் என்பதால், கடற்பரப்பின் வடிவம், ஒரு சமவிசைத் தேக்கப் பரப்பாக இருக்க வேண்டும். இதன் சமன்பாட்டை $r=a(1-\eta)$ என்று கொள்க. இங்கு η என்பது ஒரு சிறிய எண். ϵன் மதிப்பு சுமார் $\frac{1}{300}$ என்பதால், ηவும் அதே அளவு சிறிய எண்ணுகும். rன் இம் மதிப்பை (7)ம் சமன்பாட்டில் புகுத்த, கடற்பரப்பின் சமன்பாடு

$$-\frac{GM}{a(1-\eta)}+\frac{G(C-A)}{2a^3(1-\eta)^3}(3\cos^2\theta-1)$$
$$+\tfrac{1}{2}w^2a^2(1-\eta)^2(\cos^2\theta-1)=\text{மாறிலி எண்}$$

என்ருகிறது; அதாவது

$$-\frac{GM}{a}(1+\eta)+\frac{G(C-A)}{2a^3}(1+3\eta)(3\cos^2\theta-1)$$
$$+\tfrac{1}{2}w^2a^2(\cos^2\theta-1)=\text{மாறிலி எண்.}$$

$(C-A)$யும் மிகச் சிறிய எண் என்பதனால் இதனை

$$-\frac{GM}{a}+\frac{G(C-A)}{2a^3}(3\cos^2\theta-1)+\tfrac{1}{2}a^2w^2(\cos^2\theta-1)$$

$$+\eta\left(-\frac{GM}{a}\right) = \text{மாறிலி எண் என்றெழுதலாம்.}$$

$\frac{GM}{a}$ சிறு எண் அல்ல; w^2 ஒரு சிறு எண். எனவே

$$\eta=\frac{a}{GM}\left\{\frac{G(C-A)}{2a^3}3\cos^2\theta+\tfrac{1}{2}a^2w^2\cos^2\theta\right\}$$

$$=\left(\frac{3(C-A)}{2Ma^2}+\frac{a^3w^2}{2MG}\right)\cos^2\theta$$

$$=\left\{\frac{3(C-A)}{2Ma^2}+\tfrac{1}{2}\phi\right\}\cos^2\theta \qquad (16)$$

$$=f\cos^2\theta \qquad (17)$$

எனவே கடற்பரப்பின் சமன்பாட்டை $r=a(1-f\cos^2\theta)$ என்று எழுத முடியும். f க்கு "மட்டப்படுத்து எண்" (flattening) என்று பெயர்.

கிளெயிராட்டின் சமன்பாட்டை வருவிக்க, பூமியின் சமன் பாட்டை $r=a(1-\epsilon\cos^2\theta)$ என்று எடுத்துக்கொண்டோமல்லவா? அதற்குப் பதிலாக, $r=a(1-f\cos^2\theta)$ என்று எடுத்துக்கொண்டால், கிளெயிராட்டின் சமன்பாடு

$$g=g_e\left\{1+\left(\frac{5\phi}{2}-f\right)\cos^2\theta\right\},\ g_e=-\frac{GM}{a^2}\left(1+f-\frac{3\phi}{2}\right)$$

என்றாகியிருக்கும். (18)

4·6 கணக்கீடுகள்

பூமியானது, சூரியனிலிருந்து பிரிந்தபின் வெகு காலம் திரவப் பொருளாகவும், பிளாஸ்டிக்காகவும் இருந்தபடியால், பூமி தன்னைத் தானே சுற்றிவந்ததன் விளைவாக, முழுக்கோள வடிவம் நீங்கி சிற்றச்சுக் கோள வடிவம் பெற்றது. அதாவது நடுக் கோட்டினருகில் அதன் வடிவம் பிதுங்கியும், துருவங்களுக்கருகில் தட்டையாகவும் ஆகியது. இந்த நிலையினை fன் மதிப்பைக் கொண்டு அறியலாம். ஆனால் fன் மதிப்பை நேரிடையாக வடிவ கணித முறையில் கணக்கிடுவது இயலாது. ϕன் மதிப்பைத் தெரிந்துள்ளோம் என்றால் ஊசலிப் பரிசோதனைகளின் மூலம் g-யினை நேரடியாக வெவ்வேறு அட்சங்களில் கணக்கிட்டு, அதனைக் கொண்டு f ஐக் கணக்கிடுகிறார்கள்.

fஐக் கணக்கிடும் மற்ருெரு முறை, சமீப காலத்தில் கண்டு பிடிக்கப்பட்டது; செயற்கைத் துணைக்கோள்களின் பாதைகளி லிருந்து fஐக் கணக்கிட முடியும்.

நாம் மேலே தந்துள்ள சமன்பாடுகளில், சிறு எண்களின் முதல் அடுக்குகள் மட்டுமே எடுத்துக்கொள்ளப்பட்டு, மற்ற அடுக்குகள் தள்ளப்பட்டன. f, gன் **நுட்பமான** அளவுகளை அறிய இத்தகைய மிகச் சிறிய எண்களும் எடுத்துக் கொள்ளப்பட வேண்டும்; ஆயினும், நமது சமன்பாடுகள் எளியவை. இவற்றினின்று f, g ஆகியவற்றின் **தோராயமான** அளவுகளைக் கணக்கிடலாம்.

$$g = 978{\cdot}0490\quad(1+{\cdot}0052884\ \cos^2\theta - {\cdot}000\,0059\sin^2 2\theta)\text{ செமீ/செகண்டு}^2$$

என்று அமெரிக்கப் பஞ்சாங்கம் கூறுகிறது. ωன் மதிப்பு $\dfrac{2\pi}{86164{\cdot}1}$ ரேடியன்/செகண்டு என்றும், $a = 6378{\cdot}388$ கிமீ. என்றும் கொண்டால்,

$$\phi = \frac{1}{288{\cdot}9},\ f = \frac{1}{296.8}$$

fன் அனைத்துநாட்டு மதிப்பு $\dfrac{1}{297{\cdot}0}$

பூமியின் ஈர்ப்பு விசைத் தேக்கம் V எனில்,

$$-V = \frac{GM}{r} - \frac{G}{2r^3}(C-A)\ (3\cos^2\theta - 1) + \cdots$$

என்று கண்டோம். $C - A = \dfrac{2Ma^2}{3}(f - \tfrac{1}{2}\phi)$ என்பதால்

$$-V = \frac{GM}{r} - \frac{GMa}{3r^3}(f - \tfrac{1}{2}\phi)\ (3\cos^2\theta - 1) + \cdots$$

$$= \frac{GM}{r}\left\{1 - \frac{J}{3}\left(\frac{a}{r}\right)^2 (3\cos^2\theta - 1) + \cdots\right\}$$

என்க. $J = f - \tfrac{1}{2}\phi$. சிறு எண்களின் வர்க்கம் பெருக்கற் பலன் ஆகியவைகளைத் தள்ளிவிடாமல் எடுத்துக்கொண்டால்,

$$-V = \frac{GM}{r}\left\{1 - \frac{J}{3}\left(\frac{a}{r}\right)^2 (3\cos^2\theta - 1) + \right.$$

$$\left.\frac{L}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^3 (5\cos^3\theta - 3\cos\theta) + \frac{k}{30}\left(\frac{a}{r}\right)^4 (35\cos^4\theta - 30\cos^2\theta + 3)\right\}$$

என்று சுமாராகக் கணக்கிட்டிருக்கிறார்கள். a-ன் மதிப்பு 6378·270 கிமீ என்றால்,

$$J = 0{\cdot}0016232 \pm {\cdot}000\,000\,5$$
$$K = (8.845 \pm 0{\cdot}006) \times 10^{-6},$$
$$L = (2{\cdot}4 \pm 0{\cdot}2) \times 10^{-6}$$

என்று கணக்கிடப்பட்டுள்ளது.

4·7 இந்த அத்தியாயத்தில் நாம் ஆராய்ந்தவை மூன்று பொருள்களைப் பற்றியவையே; அவையாவன:

(i) பூமியின் மேற்பரப்பின் வடிவம்

(ii) பூமியின் மேற்பரப்பில் அதன் ஈர்ப்பு விசை

(iii) பூமிக்கு வெளியே அதன் ஈர்ப்பு விசை.

4·4ல் பூமியின் மேற்பரப்பின் வடிவம் கொடுக்கப்பட்டது. **4.4ல்** பூமியின் தளத்தின் மேலும் வெளியிலும் ஈர்ப்பு விசையின் அளவு தருவிக்கப்பட்டது. இவற்றிற்கு அதிக நுட்பமான சமன்பாடுகள் 4·6ல் தரப்பட்டன. இந்த ஆராய்ச்சிகள் அனைத்திலும் பூமியானது அதன் நிலநடுக் கோட்டைப் பொறுத்து சமச்சீர் பெற்றுள்ளதாகக் கருதப்பட்டது. மேலும், சுழற்சி, கடலின் ஏற்ற இறக்கம். (Tides) போன்ற அசைவுகளின் (disturbance) காரணமாகவும் இந்த சமன்பாடுகள் மாற்றப்பட வேண்டியிருக்கிறது. எனவே பூமியின் மேற்பரப்பை.

$$r = a\,(1 - Y_n^m) \tag{19}$$

என்று கொள்க. இங்கு Y_n^m ஆனது அட்சக் கோணம், தீர்க்கக் கோணம் ஆகிய இரண்டிலுமான சார்பு. பூமியின் ஈர்ப்பு விசைத் தேக்கம்

$$\Psi = -\frac{GM}{r} + C_n^m\, r^n\, P_n^m + \frac{A_n^m\, P_n^m}{r^{n+1}} \tag{20}$$

என்று கொள்க. இங்கு P_n^m என்பது லெஜந்திரேயின் முதற் பிரிவு துணைச் சார்பு (Associated Legendre Function of the first kind) எனப்படும்.

$$P_n^m(\mu) = (1-\mu^2)^{m/2} \frac{\partial^m}{\partial \mu^m} P_n(\mu)$$

பூமியின் மேற்பரப்பில் Ψன் மதிப்பு ஒரு மாறிலி எண் என்பதால், $r = a(1 - \Upsilon_n^m)$ ஐ இதில் பிரதியிட,

$$-\frac{GM}{a}(1+\Upsilon_n^m) + C_n^m a^n P_n^m (1 - n\,\Upsilon_n^m)$$

$$+\frac{A_n^m P_n^m}{a^{n+1}}\left\{1 + (n+1)\ \Upsilon_n^m\right\} = \text{மாறிலி எண்}$$

அதாவது $\frac{GM}{a}\Upsilon_n^m = C_n^m a^n P_n^m + \frac{A_n^m}{a^{n+1}} P_n^m$

$$\therefore \quad \Upsilon_n^m = \frac{C_n^m a^{n+1} P_n^m}{GM} + \frac{A_n^m P_n^m}{GMa^n} \qquad (21)$$

எனவே பூமியின் மேற்பரப்பின் சமன்பாடு

$$r = a\left\{1 - \frac{C_n^m a^{n+1} P_n^m}{GM} - \frac{A_n^m P_n^m}{GMa^n}\right\} \qquad (22)$$

(20)ம் சமன்பாட்டை, rக்கு வகைப்படுத்தினால், ஈர்ப்பு விசையின் ஆரைக் கூறு g_r கிடைக்கும்.

$$g_r = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} = -\frac{GM}{r^2} - n\,C_n^m r^{n-1} P_n^m + \frac{A_n^m P_n^m (n+1)}{r^{n+2}}$$

இதனில் rன் மதிப்பை (22)லிருந்து பிரதியிட்டால், பூமியின் மேற்பரப்பில் அதன் ஈர்ப்பு விசையின் ஆரைக் கூறு g_n^m கிடைக்கும்.

$$g_n^m = -\frac{GM}{a^2}\left\{1 + \frac{2\,C_n^m a^{n+1} P_n^m}{GM} + \frac{2\,A_n^m P_n^m}{GMa^n}\right\}$$

$$- n\cdot C_n^m a^{n-1} P_n^m + \frac{A_n^m P_n^m (n+1)}{a^{n+2}}$$

$$= -\frac{GM}{a^2} - (n+2)\,C_n^m a^{n-1} P_n^m + \frac{(n-1)\,A_n^m P_n^m}{a^{n+2}} \qquad (23)$$

இதில் A_n^mக்கு Υ_n^m மூலம் (21)ம் சமன்பாட்டிலிருந்து பிரதியீடு செய்ய

$$g_n^m = -\frac{GM}{a^2} + (n-1)\frac{GM}{a^2}\Upsilon_n^m - (2n+1)C_n^m a^{n-1} P_n^m \qquad (24)$$

(24)ம் சமன்பாட்டினை, கிளெயிராட்டின் சமன்பாட்டின் பொதுப்படுத்தப்பட்ட வடிவமாகக் கருதலாம்.

பயிற்சி

1. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ என்ற சிற்றச்சுக் கோள உருவினுக்கு ϵ என்பது மையவகற்சி (ellipticity) எனில், இதன் ஈர்ப்புவிசைத் தேக்கம் r தூரத்தில்

$$-\frac{GM}{r}-\frac{GQ}{4r^3}\,(3\cos^2\theta-1)$$

என்று காட்டுக. இங்கு $Q=\dfrac{2}{5}\,M\,(a^2-c^2)$

2. முதல் கணக்கில், $Q=-\dfrac{4}{5}\;Ma^2\lambda$, $\lambda<\epsilon$, சுமாராக என்று கொள்க. இக்கோள உரு, அதன் அச்சைச் சுற்றிய அளவு கோண வேகத்தில் சுற்றுகிறது என்க. கோள உருவின் வடிவம் ஒரு சம ஈர்ப்பு விசைத் தேக்கப் பரப்பு என்று கொண்டு

$$2\left(1-\frac{a}{c}\right)+\frac{2a^3\lambda}{5c^3}\left(2+\frac{c^3}{a^3}\right)+\phi=0$$

என்று காட்டுக.

3. பூமியின் ஈர்ப்பு விசை, அதற்கு வெளியேயுள்ள புள்ளியில் P_r , P_θ என்ற கூறுகளை, முறையே ஆரைத் திசை, குறுக்குத் திசைகளில் கொண்டிருந்தால்,

$$P_r=-\frac{GM}{r^2}+\frac{3\,GM\,a^2\,(f-\frac{1}{2}\phi)(\cos^2\theta-\frac{1}{3})}{r^4}$$

$$P_\theta=\frac{2\,GM\,a^2\,(f-\frac{1}{2}\phi)}{r^4}\sin\theta\cos\theta$$

என்று காட்டுக.

4. பூமியின் ஈர்ப்பு விசைக்கு, பூமியின் மையத்தை யொட்டிய உந்தத் திருப்புத் திறன்

$$\frac{2\,GM\,a^2}{r^3}\,(f-\tfrac{1}{2}\phi)\sin\theta\cos\theta$$

என்று காட்டுக.

5. பூமியின் ஈர்ப்பு விசையின் மீப்பெரு மதிப்பு யாது, அது எங்கு பெறப் படுகிறது என்று கண்டுபிடிக்க.

6. இந்த அத்தியாயத்தில் பெறப்பட்ட ஈர்ப்பு விசைத் தேக்கங்கள் ஒவ்வொன்றும் $\dfrac{\partial^2V}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2V}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2V}{\partial z^2}=0$ என்ற சமன்பாட்டைச் சரிசெய்கின்றது என்று காட்டுக.

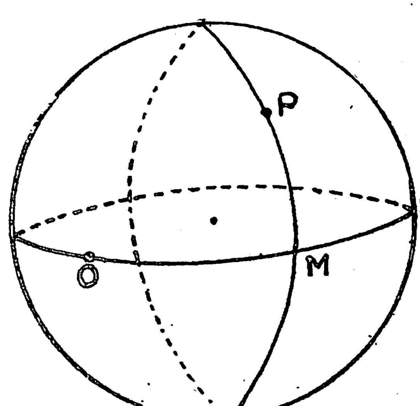
(இந்த சமன்பாட்டின் ஆரைக் கோண தூரக் கூறுகள் வடிவமாகிய $\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial V}{\partial r}\right)+\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial V}{\partial\theta}\right)+\dfrac{1}{\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2V}{\partial\phi^2}=0$ ஐ எடுத்துக்கொள்க.)

5. சுற்றுப் பாதைகள்
(Orbits in Space)

5·1 கூறுவகைகள்

வானியலில், ஒரு பொருளின் இருப்பிடத்தைக் குறிப்பிட, வான்கோளம் (celestial sphere) என்ற ஒரு கருத்தைப் பயன் படுத்துகிறோம். இதன் மையப் புள்ளியை எங்கு வேண்டுமானாலும் வைத்துக்கொள்ளலாம். இதன் ஆரம் வேண்டிய அளவு மிகப் பெரிய எண். பார்ப்பதற்கு ஒரே திசையிலுள்ள பல பொருள்கள் இந்தக் கோளத்தின் மீது ஒரே புள்ளியில் பதிவாகும். இப்புள்ளியைக் குறிக்க, கோணக் கூறுகள் இரண்டு தேவை. ஏதேனும் நிலையான ஒரு பெரு வட்டத்தில் *O* எனும் ஒரு நிலையான புள்ளியை எடுத்துக் கொள்க. இவ் வட்டத்திற்குச் செங்குத்தாகவும், கொடுத்துள்ள பொருள் *P* வழியாகச் செல்லுமாறும் மற்றொரு பெருவட்டம் வரைக.

இவற்றின் ஒரு வெட்டுப்புள்ளி M எனில், $\overset{\frown}{OM}$, $\overset{\frown}{MP}$ ஆகிய விற்கள் கோள மையத்தில் தாங்கும் கோணங்களே இக்கூறுகளாகும். இவ் வகையிலேயே (i) திசைவில்லும், கோணவேற்றமும்; (Azimuth



படம் 5.1

and altitude) (ii) நேரக்கோணமும்; (hour angle) சரிவுக் கோணமும் (declination); (iii) வல ஏற்றமும் (Right Ascension),

சரிவுக்கோணமும்; (iv) வான நெடுங்கோடு அளவும் (celestial longitude) வானக்குறுங்கோடு அளவும் (celestial latitude); ஆகிய நான்கு முக்கிய கூறுவகைகள் நிறுவப்பட்டுள்ளன. இவற்றில் முதல் மூன்றும் செய்முறை வானியலில் பயன்படும். அறிமுறை வானியலில் நான்காம் வகை பயன்படும்.

செய்முறை வானியலில், நிலையான அச்சுகள் நமக்குத் தேவைப் படுகின்றன. முப்பரிமாண வடிவ கணிதத்தைப் பயன் படுத்தி, இயக்கவியல் முறைகள் மேற்கொள்ளப் படப்போவதால், ஒரு நிலை யான ஆதிப் புள்ளியும் தேவை. இந்த ஆதிப் புள்ளியை எங்கு மேண்டுமானாலும் எடுத்துக் கொள்ளலாம். சூரியனின் மையப் புள்ளியை ஆதிப் புள்ளியாகக் கொண்ட கூறுகளுக்கு **பரிதிமையக் கூறுகள்** (Heliocentric Co-ordinates) என்னும், பூமியின் மையப் புள்ளியை ஆதிப் புள்ளியாகக் கொண்ட கூறுகளுக்கு **புவி மையக் கூறுகள்** (Geocentric Co-ordinates) என்னும் பெயர். வேறு கிரகங் களின் மையப்புள்ளிகளை ஆதிப் புள்ளிகளாகக் கொண்ட கூறுகள் **கோள்மையக் கூறுகள்** (Planeto-centric Co-ordinates) என்னும், சந்திரனின் மையப் புள்ளியை ஆதிப் புள்ளியாகக் கொண்ட கூறுகள் **திங்கள் மையக் கூறுகள்** (Selenocentric Co-ordinates) என்றும் கூறப்படும். சூரியனைச் சுற்றிவரும் கிரகங்களின் பாதைகளைப் பற்றி அறிய பரிதி மையக் கூறுகளைப் பயன்படுத்துவோம். துணைக் கோள்களின் பாதைகளை ஆராய, பொதுவில் அக்கோள் மையக் கூறுகளையே பயன்படுத்துகிறார்கள்.

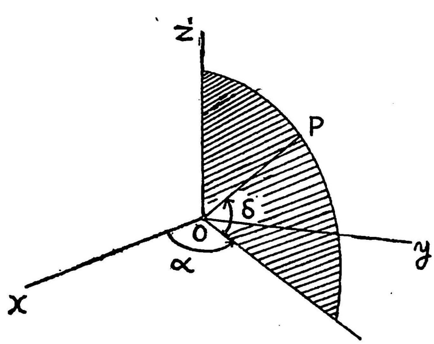
சூரியனின் **தோற்றப் பாதை** (ecliptic) வான் கோளத்தில் ஒரு பெரு வட்டமாக அமைகிறது. இவ்வட்டத்தின் தளத்தைத் **தோற்றப் பாதைக் தளம்** (plane of the ecliptic) என்போம். அவ்வாறே, பூமி தன்னைத் தானே சுற்றும் அச்சுக்கு செங்குத்தான பெருவட்டத்தை நடுக்கோடு (equator) என்னும், அதன் தளம் **நடுக் கோட்டுத் தளம்** (plane of the equator) என்னும் குறிப்பிடப்படும். கார்ட்டீ சியன் அச்சுக் கூறுகளைப் பெற இவ்விரண்டி லொன்றை Z-தளமாகக் கொள்ளலாம். தோற்றப் பாதை Z-தளமாகக் கொண்ட கூறுகள் **தோற்றப் பாதைக் கூறுகள்** (Ecliptic Co-ordinates) என்னும், நடுக்கோட்டுத் தளத்தை Z-தளமாகக் கொண்ட கூறுகள் **நடுக் கோட்டுக் கூறுகள்** (Equatorial Co-ordinates) என்றும் கூறப்படும்.

தோற்றப் பாதைத் தளமும், நடுக் கோட்டுத் தளமும் ஒரு கோட்டில் வெட்டுகின்றன. இக் கோட்டில், பூமியிலிருந்து நோக் குங்கால் எத்திசையில் சூரியன் நடுக் கோட்டைத் தாண்டுகையில் தெற்கிலிருந்து வடக்கு நோக்கிச் செல்வதாகத் தெரிகிறதோ அதனை **மேட முதற்புள்ளி** (First point of Aries) யின் திசை என்போம்.

இதனையே மேற் கூறிய இரு விதக்கூறுகளிலும் X அச்சாகக் கொள் வோம். இப்போது தோற்றப்பாதைக் கூறுகளை எடுத்துக் கொள்க. தோற்றப்பாதைத் தளத்தில்தான் பூமி சூரியனைச் சுற்றி வருகிறது. இங்கு Z-அச்சை, அதன் உச்சியிலிருந்து பார்க்குமிடத்து பூமியின் ஓட்டம் பாசிடிவ் ஆக இருக்குமாறு எடுத்துக் கொள்ளுகிறோம். இவ்வாறே, நடுக் கோட்டுக் கூறுகளின் Z அச்சானது, அதன் உச்சியிலிருந்து பார்க்குமிடத்து பூமியின் சுழற்சி பாசிடிவ் ஆக இருக்குமாறு எடுத்துக் கொள்ளப்படுகிறது. Y அச்சு, பிறகு தகுந்த படி எடுத்துக் கொள்ளப்படுகிறது. Oஐ ஆதிப் புள்ளியாகக் கொண்டால், தோற்றப் பாதைக் கூறுகள் (X, Y, Z) எனவும், நடுக் கோட்டுக் கூறுகள் (x, y, z) எனவும் இனி குறிப்பிடப்படும்.

தோற்றப் பாதைக்கும் நடு வட்டத்திற்குமிடையேயுள்ள கோணம் சரிவுக்கோணம் (obliquity) எனப்படும். இதன் மதிப்பு 1959 ல் $23° 26' 40''{\cdot}39$; 1974 ல் $23° 26' 33''{\cdot}34$. இதனை ϵ என்று குறிப்பது வழக்கம். நடுவட்டத் தளமும், தோற்றப்பாதைத் தளமும் நிலையானதல்ல என்று கண்டிருக்கிறார்கள். இதனால் ϵ ன் மதிப்பும் நாளுக்கு நாள் மாறுகிறது. எனவே நமக்கு நிலையான அச்சுகள் தேவைப்பட்டால், நடுக் கோட்டையும், மேடமுதற் புள்ளியையும் ஒரு குறிப்பிட்ட நேரத்தில் இருப்பவையாகக் கொள்வது வழக்கம். இதனையே " அன்றைய நடுக்கோடு, மேட முதற்புள்ளி ஆகியவற்றின் நிலைகள் " (mean equator and equinox of date) என்று குறிப்பிடு வோம். இந்த நேரத்தைத் தொடக்கக் கட்டம் (epoch) என்று கூறுவர். எந்த நேரத்தையும் தொடக்கக் கட்டமாகக் கொள்ளலாம்.

5·2 மாற்றச்சமன்பாடுகள்



படம் 5.2

படத்தில் P என்பது விண் வெளியில் ஒரு புள்ளி. $OP=r$ என்க. ZOP என்ற தளம் xy தளத்தை ONல் வெட்டட்டும். OP, $\angle ZOP$, $\angle XON$ ஆகியவை Pன் கோண தூரக் கூறுகளாகும்.

நடுக் கோட்டுக் கூறுகளில் $\angle XON$ ஆனது வல ஏற்றம் (right ascension) ஆகும். $\angle PON = 90° - \angle ZOP$யே சரிவுக் கோணம் (declination) ஆகும். ஒரு புள்ளியின் வல ஏற்றம் α, சரிவுக் கோணம் δ எனில், அதன் கோணதூரக் கூறுகள் $(r, 90-\delta, \alpha)$ ஆகும். இப் புள்ளியின் கார்ட்டீசியன் கூறுகள் (x, y, z) எனில்

$$x = r \cos \delta \cos \alpha$$
$$y = r \cos \delta \sin \alpha$$
$$z = r \sin \delta$$

என்பதைக் கவனிக்க. δ ஆனது $-90°$ முதல் $90°$ வரையிலும், α ஆனது $0°$ முதல் $360°$ வரையிலும் பரவலாம்.

இம்மாதிரியே, தோற்றப்பாதைக் கூறுகளில் OP, $\angle ZOP$, $\angle XON$ ஆகியவை Pன் கோணதூரக் கூறுகளாகும். $\angle XON$ ஆனது வான நெடுக் கோட்டுக் கோணம் (celestial longitude) எனவும் $\angle PON = 90° - \angle ZOP$ ஆனது வானக் குறுங்கோட்டுக் கோணம் எனவும் குறிப்பிடப்படும். இவற்றை முறையே λ, β என்று குறித்தால், புள்ளியின் கோணதூரக் கூறுகள் $(r, 90-\beta, \lambda)$ ஆகும். இங்கு λ ஆனது $0°$ முதல் $360°$ வரையிலும் β ஆனது $-90°$ முதல் $90°$ வரையிலும் பரவும். (X, Y, Z) என்பன ஒரு புள்ளியின் தோற்றப் பாதைக் கார்ட்டீசியன் கூறுகள் எனில்,

$$X = r \cos \beta \cos \lambda$$
$$Y = r \cos \beta \sin \lambda$$
$$Z = r \sin \beta$$

தோற்றப் பாதைக் கூறுகளுக்கும், நடுக்கோட்டுக் கூறுகளுக்கு மிடையேயுள்ள தொடர்பை அடியிற் கண்ட சமன்பாடுகள் வெளிப் படுத்துகின்றன.

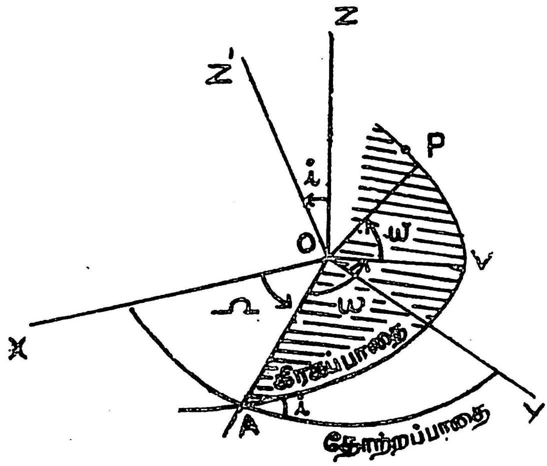
$X = x$	$x = X$
$Y = y \cos \epsilon + z \sin \epsilon$	$y = Y \cos \epsilon - Z \sin \epsilon$
$Z = y \sin \epsilon + z \cos \epsilon$	$z = Y \sin \epsilon + Z \cos \epsilon$

இதனுல் பின்வரும் சமன்பாடுகள் எளிதில் கிடைக்கின்றன.

$$\cos \beta \cos \lambda = \cos \delta \cos \alpha$$
$$\cos \beta \sin \lambda = \cos \delta \sin \alpha \cos \epsilon + \sin \delta \sin \epsilon$$
$$\sin \beta = -\cos \delta \sin \alpha \sin \epsilon + \sin \delta \cos \epsilon$$
$$\cos \delta \cos \alpha = \cos \beta \cos \lambda$$
$$\cos \delta \sin \alpha = \cos \beta \sin \lambda \cos \epsilon - \sin \beta \sin \epsilon$$
$$\sin \delta = \cos \beta \sin \lambda \sin \epsilon + \sin \beta \cos \epsilon$$

இவற்றைக் கொண்டு, ஒருவகைக் கூறுகளிலிருந்து மற்றொரு வகைக் கூறுகளைக் கணக்கிடுதல் எளிது.

5·3 பாதையின் மூலகங்கள்



படம் 5.3

சூரியனைச் சுற்றும் ஒரு கிரகத்தின் பாதையைக் கணக்கிட வேண்டும் என்க. OX, OY, OZ என்பன தோற்றப்பாதை அச்சுகள். O தான் சூரியன். கிரகத்தின் பாதை சூரியன் வழியே செல்லும் ஒரு தளத்தில் இருக்கும். இத்தளம் தோற்றப்பாதைத் தளத்தை ஒரு கோட்டில் வெட்டும். இங்கு கிரகமானது Z அச்சின் நெகட்டிவ் பக்கத்திலிருந்து பாசிடிவ் பக்கத்திற்குச் செல்லும் புள்ளி Aயை **ஏறுகோள் சந்தி** (ascending node) என்போம். AVP என்பது கிரகத்தின் பாதை. V என்பது இப்பாதையில் அண்மைப் புள்ளி (perihelion). P என்பது பாதையில் ஏதேனுமொரு புள்ளி.

கோணம் XOA ஆனது, ஏறுகோள் சந்தியின் **நெடுங் கோட்டுக் கோணம்** (longitude of the ascending node) எனப்படும். இது Ω என்று குறிப்பிடப்படும்.

கிரகத்தின் பாதைத் தளத்திற்கும், தோற்றப்பாதைத் தளத்திற்கு மிடையேயுள்ள கோணம் சாய்வுக்கோணம் (inclination) எனப்படும். இதனை i என்று குறிப்பிடுவோம். i ஆனது 0° முதல் 180° வரை மதிப்பெடுக்கலாம். $0<i<90$ எனில் கிரகத்தின் போக்கை முற்போக்கு (direct motion) என்றும், $90<i<180$ எனில் போக்கை பிற்போக்கு (retrograde motion) என்றும் கூறுவது வழக்கம். கிரகத்தின் பாதைக்குச் செங்குத்தாக OZ' என்னும் கோட்டை வரைக. OZ' ன் திசையை, அதன் உச்சியிலிருந்து பார்க்குமிடத்து கிரகத்தின் போக்கு பாசிடிவ் திசையில் இருக்குமாறு கொள்க. இப்போது $\angle ZOZ' = i$ என்று அறிக.

Ω, i ஆகியவை தரப்பட்டால், இவ்வாறு விண்வெளியில் கிரகத்தின் பாதைத்தளம் அறுதியாக நிறுவப்படுகிறது.

கோணம் AOV ஆனது **அண்மைப் புள்ளியின் வீச்சும்** (argument of the perihelion) என்று கூறப்படும். இதனை w என்று குறிப்பிடுவோம்.

Ω, i, w ஆகிய மூன்றும் தரப்படுவதால் விண்வெளியில் கிரகத்தின் பாதையின் போக்கு (orientation) அறியப்படுகிறது.

பாதையின் அளவைக் குறிக்க இரு மூலகங்கள் தேவை. பாதை ஒரு நீள் வளையமாயின் இவற்றை a, e என்று கொள்ளலாம். (a= சராசரி தூரம், e மையவகற்சி எண்) அதிபரவளையப் பாதைக்கு, q, e ஆகியவை மூலகங்கள். இங்கு q என்பது அண்மைப் புள்ளியின் தூரம். பரவளையப்பாதைக்கு $e=1$, அண்மைப்புள்ளியின் தூரம் q ஆகியவையே மூலகங்களாகும். இவ்விதமாக Ω, i, w, a (அல்லது q), e ஆகிய ஐந்தும் தரப்பட்டால் விண்வெளியில் கிரகத்தின் பாதை நன்கு நிலை நிறுத்தப்படுகிறது.

பாதையில் கொடுத்துள்ள நேரத்தில் கிரகம் எங்கு இருக்கும்? இதனை அறிய வேண்டுமாயின், பாதையில் ஒரு நன்கறிந்த புள்ளியில் கிரகம் இருந்த நேரத்தினை முன்பே தந்திருக்க வேண்டும். இது பொதுவில் அண்மைப் புள்ளியாகக் கொள்ளப்படுகிறது. கிரகம் அண்மைப் புள்ளியிலிருந்தபோது நேரம் T எனில், T தான் கிரகப் பாதையின் ஆறுவது மூலகம். இவ்வாறு a, e, i, Ω, ω, T என்ற ஆறு மூலகங்களும் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால் மற்ற எந்த நேரத்திலும் அக்கிரகத்தின் இருப்பிடத்தைக் கணக்கிட்டுவிட முடியும்.

ஒரு கொடுக்கப்பட்ட திணிவுள்ள துகளின் இயக்கச் சமன்பாடுகள் மூன்று அல்லவா? இவை ஒவ்வொன்றும் இரண்டாம் படியுள்ள வகைக்கெழுச் சமன்பாடு. எனவே இவற்றின் தீர்வில் ஆறு மாறிலி எண்கள் இருக்கும். இந்த ஆறையும் கணக்கிட, துகளின் பாதையைப் பற்றி ஆறு விவரங்கள் தொடக்கத்தில் தரப்பட்டிருக்க வேண்டும். இவை அப்பாதையின் ஆறு மூலகங்களுக்கு இசைந்துள்ளன. வேறு விதத்தில் பார்க்குமிடத்து, பாதையை முழுமையாக அறிய வேண்டுமாயின், கொடுத்துள்ள நேரத்தில் துகளின் மூன்று கூறுகளை (co-ordinates)யும், அதன் திசைவேகத்தின் மூன்று குத்துப் பிரிவு (components)களையும் தெரிந்திருக்க வேண்டும். இவற்றின் எண்ணிக்கையும், மூலகங்களின் எண்ணிக்கையும் ஒத்துள்ளதைக் கவனிக்க,

கிரகத்தின் திணிவு அறியப்படாவிடில், அதன் சராசரி இயக்கம் (n), அல்லது அதன் காலவட்ட நேரம் (P) தரவேண்டும்.

நாம் மேலே குறிப்பிட்ட ஆறு மூலகங்களுக்குப் பதிலாக, வேறு மூலகங்களும் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. அவற்றில் சிலவற்றை இப்போது விவரிப்போம்.

அண்மைப் புள்ளியின் நெடுங்கோட்டுக் கோணம் (longitude of the perihelion) என்பது $\Omega + \omega$ ஆகும். இது ϖ என்று குறிப்பிடப்படும்.

$$\varpi = \Omega + \omega$$

இவற்றில் Ω என்பது தோற்றப்பாதை தளத்திலும், ω என்பது கிரகப் பாதைத் தளத்திலும் அளக்கப்படுவதைக் கவனிக்க.

$$\varpi = \angle XOA + \angle AOV$$

சில பாதைகளுக்கு $i = 0$ அல்லது 180 எனில், ω ஐ அளத்தல் இயலாது. அவ்வமயங்களிலும் ϖஐ அளக்க முடியும் என்பதைக் காண்க.

குறுக்குக் கோட்டுக் கோணவீச்சம் (argument of the latitude) என்பது $\angle AOP$ ஆகும். இதனை u என்று குறிப்பிடுவர். பாதையில் w என்பது இயல்பு நெறிப்பிழற்சிக் கோணம் $\angle VOP$ எனில்,

$$u = \omega + w \text{ அதாவது,}$$

$$u = \varpi - \Omega + w$$

கிரகத்தின் நெடுக்கோட்டுக் கோணம் (longitude in the orbit) என்பது $\Omega + u$ ஆகும். இதனை $\varpi + w$ என்றும் அறிக. i 0° அல்லது 180° என்றுள்ள போதிலும் நெடுக்கோட்டுக் கோணத்தை அறிதல் முடியும்.

M என்பது கிரகத்தின் சராசரி நெறிப் பிறழ்சி எனில், $\varpi + M$ என்ற கோணமானது சராசரி நெடுக்கோட்டுக் கோணம் (mean longitude) எனப்படும். இதனை L என்று குறிப்பிடுவோம். t என்பது அப்போதைய நேரம் எனில், $M = n(t - T)$ என்பதை நினைவில் வைக்க. t_0 என்பது ஏதேனும் ஒரு குறிப்பிட்ட நேரம் எனில், அந்நேரத்தில் சராசரி நெடுக்கோட்டுக் கோணம் (mean longitude) ϵ என்க. ϵ ஐயே ஒரு மூலகமாகத் தருவதும் உண்டு.

$$\epsilon = \varpi + n(t_0 - T)$$

என்பதைக் கவனிக்க.

X என்பது $-nT$ என்று வரையறுக்கப்படுகிறது. Tஐத் தருவதற்குப் பதில் ϵ அல்லது Xஐத் தருவது வழக்கம்.

5·4. மூலகங்களிலிருந்து கூறுகளைப் பெறுதல்:

ஒரு கிரகத்தின் மூலகங்கள் அடியில் உள்ளதுபோல் தரப் பட்டிருக்கும். இவற்றினின்று குறிப்பிட்ட தேதியன்று அக்கிரகத்தின் இருப்பிடத்தைக் கணக்கிடும் முறையை இனி விவரிப்போம்.

$a = 2{\cdot}237$ $\quad i = 3^\circ{\cdot}7$

$e = 0{\cdot}53$ $\quad \Omega = 207^\circ{\cdot}87$

$n = 0{\cdot}29$ டிகிரி/நாள் $\quad w = 155^\circ{\cdot}0$

$T = 1960$ செப்டம்பர் 28

1960ம் வருடம் டிசம்பர் முதல் தேதியன்று கிரகத்தின் இருப் பிடத்தைக் கணக்கிட வேண்டும்.

செப்டம்பர் 28 முதல் டிசம்பர் 1 வரை நாள்கள் 64. எனவே

$t - T = 64$

சராசரி இயக்கம் $n = 0{\cdot}29$ டிகிரி/நாள். எனவே,

$M = n\,(t - V) = 18{\cdot}56$ டிகிரி

கெப்ளர் சமன்பாட்டைத் தீர்த்து E ஐக் கணக்கிடுக.

$E = 36^\circ 42'$ சுமாராக.

பிறகு,

$$\tan \frac{w}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\ \tan \frac{E}{2}$$

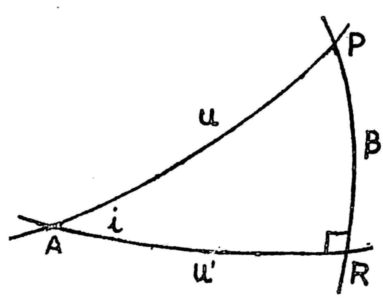
என்ற சூத்திரத்தைக் கொண்டு wஐக் கணக்கிடுக.

இப்போது $u = \omega + w$ கிடைக்கும்.

மேலும்

$r = a\,(1 - e \cos E)$ ஆதலால்

r ஐயும் கணக்கிட முடிகிறது.



படம் 5·4

படத்தில் AP என்பது கிரகத்தின் பாதை. AR என்பது தோற்றப்பாதை. P என்பது கிரகத்தின் நிலை. PR ஆனது ARக்குச்

செங்குத்தாக வரையப்பட்ட பெருவிற்பாகம் எனில், $\angle PAR = i$, $PR = \beta$, $AP = u$ என்பது வெளிப்படை.

$AR = u'$ என்க.

சைன் விதிப்படி,

$$\frac{\sin i}{\sin \beta} = \frac{\sin 90}{\sin u}$$

$$\therefore \sin \beta = \sin i \sin u$$

அடுத்தபடியாக, கோடன்ஜன்ட் விதிப்படி,

$$\cot 90^\circ \sin i = \cot u \sin u' - \cos i \cos u'$$

அதாவது, $0 = \cot u \sin u' - \cos i \cos u'$

$$\therefore \tan u' = \cos i \tan u$$

$$\therefore u' = \tan^{-1} (\cos i \tan u)$$

இவ்விரண்டு சூத்திரங்களிலிருந்து βவும், $\lambda = (\Omega + u')$ம் கணக்கிடப்படும்.

$0 < i < 90$ எனில் $0 < u' < 90$

$90 < i < 180$ எனில் $-90 < u' < 0$

இவ்வாறு கொடுத்துள்ள நேரத்தில் கிரகத்தின் $(r, 90-\beta, \lambda)$ என்ற கூறுகளைக் கணக்கிடமுடிகிறது.

விண்பொருளின் பாதை ஒரு பரவளை என்க; இதற்குத் தந்துள்ள மூலகங்கள் q, i, Ω, ω, T என்க.

$$\mu = G (M+m),$$

$$\left(\frac{\mu}{2q^3}\right)^{\frac{1}{2}} (t-T) = \tan \frac{w}{2} + \frac{1}{3} \tan^3 \frac{w}{2}$$

என்ற சமன்பாடுகள் மூலம் wஐக் கணக்கிடலாம்.

$$r = \frac{2q}{1 + \cos w}$$

என்பதைப் பயன்படுத்தி rஐயும் காணலாம்.

β, λ ஆகியவை முன்போலவே கணக்கிடப்படவேண்டும்.

விண் பொருளின் பாதை அதிபரவளை எனில்,

$$\sqrt{\frac{\mu}{-a^3}} (t-T) = e \sinh F - F$$

என்ற சமன் பாட்டிலிருந்து F ஐக் கணக்கிடுக.

$$\tan\frac{w}{2} = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}}\tanh F/2$$

என்ற சமன்பாட்டிலிருந்து Fஐயும்,

$$r = -a\,(e\cosh F - 1)$$

என்ற சமன்பாட்டிலிருந்து r ஐயும் கணக்கிடலாம்.

β, λ ஆகியவை முன்போலவே கணக்கிடப்படும்.

5·5 இருப்பிடம், திசை வேகம் ஆகியவற்றிலிருந்து மூலகங்கள் :

ஒரு விண்பொருளின் மூலகங்களிலிருந்து, அதன் இருப்பிடத்தைக் கணக்கிடும் முறையினை இதுவரை விவரித்தோம், இப்போது ஒரு விண்பொருளின் இருப்பிடம், அதன் திசைவேகம் இவைகளை அறிந்திருப்பின் அதன் மூலகங்களை கணக்கிடுதல் எங்ஙனம் என்று ஆராய்வோம்.

M, m என்பவை முறையே சூரியன், விண்பொருள் ஆகியவற்றின் திணிவுகள், Mஐ மையமாகக் கொண்ட ஒரு கூறுவகை $OXYZ$ என்க. இது தோற்றப் பாதைக் கூறுவகையாகவோ, அல்லது நடுக்கோட்டுக் கூறுவகையாகவோ இருக்கலாம். இந்த அச்சுகள் நிலையானவைகளாக இருத்தல் அவசியம்.

கொடுத்துள்ள ஒரு நேரத்தில், mன் இருப்பிடத்தின் கூறுகள் (X, Y, Z). அதன் திசைவேகத்தின் கூறுகள் $(\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z})$ என்க. Mக்கும் mக்கும் இடைத்தூரம் r எனில்,

$$r^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$$

Mஐப் பொறுத்து mன் வேகம் v எனில்,

$$v^2 = \dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2$$

$$\mu = k^2\,(M+m)$$

என்பதையும் நாமறிவோம். இங்கு k என்பது கவுசின் மாறிலி எண்.

இவற்றிலிருந்து,

$$v^2 = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$$

என்ற சமன்பாட்டைப் பயன்படுத்தி a யினைக் கணக்கிடலாம்.

$\frac{1}{a} = 0$ எனில் விண் பொருளின் பாதை பரவளையாகும். a ஒரு

குறை எண் எனில் பாதை அதிபரவளேயாம். நீள் வட்டப் பாதைக்கு, a ஒரு மிகை எண்ணுக இருத்தல் அவசியம்.

$\frac{1}{2}h$ என்பது பரப்பு வேகம் எனில்

$$\mathbf{h}=\mathbf{r}\times\mathbf{v}$$

ஆதலால் hன் கூறுகள் h_1, h_2, h_3 எனில்,

$$h_1 = Y\dot{Z}-\dot{Y}Z$$

$$h_2=Z\dot{X}-\dot{Z}X$$

$$h_3=X\dot{Y}-\dot{X}Y$$

$$h = \sqrt{h_1^2+h_2^2+h_3^2}$$

மேலும், **r**, **v** ஆகியவை பாதைத் தளத்தில் உள்ள வெக்டர்களாதலால், **h** ஆனது பாதைக்குச் செங்கோட்டைக் குறிக்கும், இதனை OZ' என்று கொள்க. ஏறுகோள் சந்தி A எனில்,

$$\Omega = \angle XOA$$

$$i = \angle ZOZ'$$

ஆகவே Z'ன் நெடுக்கோட்டுக் கோணம் $\Omega-90$ ஆகிறது. இதனுல் OZ'ன் திசைக் கொசைன்கள்

$$\sin i \cos(\Omega-90), \sin i \sin(\Omega-90), \cos i,$$

அதாவது $\sin i \sin\Omega$, $-\sin i \cos\Omega$, $\cos i$ ஆகின்றன.

ஆனுல் இவையே h_1/h, h_2/h, h_3/h ஆதலால்

$$h_1/h = \sin i \sin\Omega$$

$$h_2/h = \sin i \cos\Omega$$

$$h_3/h = \cos i$$

இம் மூன்று சமன்பாடுகளிலிருந்து i , Ω ஆகியவை கணக்கிடப் படுகின்றன.

$$h^2 = \mu a(1-e^2)$$

என்ற சமன்பாடு, e ஐக் கணக்கிட உதவுகிறது.

w ஐக் கணக்கிட இனி முயல்வோம்.

$$r^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$$

என்பதால், இதனை வகையிட

$$r\dot{r} = X\dot{X} + Y\dot{Y} + Z\dot{Z}$$

என்று பெறுகிறோம். இதிலிருந்து $\dot{r}$ன் மதிப்பைப் பெறுகிறோம்.

$$\frac{h^2/\mu}{r} = 1 + e\cos w$$

என்ற சமன்பாட்டை வகைப்படுத்தினால் $\frac{h^2/\mu}{r^2}\dot{r} = e\sin w\,\dot{w}$

ஆனால்,

$$r^2\dot{w} = h$$

எனவே,

$$e\sin w = \frac{h}{\mu}\dot{r}$$

இத்துடன் $h^2/\mu = r(1 + e\cos w)$ வையும் சேர்த்து எடுத்துக் கொண்டால் wஐ அறுதியாகப் பெறலாம்.

அடுத்தபடியாக u ஐக் கணக்கிடுவோம். mன் குறுங்கோட்டுக் கோணம் β எனில் $Z = r\sin\beta$

ஆனால் $\sin\beta = \sin i\sin u$

எனவே, $Z = r\sin i\sin u$

மேலும் mன் திசைக் கொசைன்கள் $\frac{X}{r}$, $\frac{Y}{r}$, $\frac{Z}{r}$, OAன் திசைக் கொசைன்கள் $\cos\Omega$, $\sin\Omega$, o என்பதாலும், mன் திசைக்கும் Aன் திசைக்கும் இடையேயுள்ள கோணம் u என்பதாலும்

$$\cos u = \frac{X}{r}\cos\Omega + \frac{Y}{r}\sin\Omega$$

எனவே இவ்விரு சமன்பாடுகளிலிருந்து u அறுதியாகக் கணக்கிடப் படுகிறது.

இவ்வாறு $\omega = u - w$ கிடைக்கிறது.

கடைசியாக Tஐக் காணும் முறையை விவரிப்போம். பாதை நீள்வளையம் என்க.

$$\text{Tan}\,\frac{w}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\frac{E}{2}$$

என்ற சமன்பாட்டிலிருந்து Eஐயும், பிறகு கெப்ளரின் சமன்பாட்டி லிருந்து சராசரி நெறிப்பிறழ்சி Mஐயும் கணக்கிடலாம். $\mu = n^2a^3$ என்பதால் nம் தெரிந்த எண்ணே. $M = n(t-T)$ என்பதால் Tஐக் கணக்கிடுதல் எளிது.

பாதை பரவளையாகவோ அதிபரவளையாகவோ இருப்பின் Tஐக் கணிக்கும் முறையை இவ்வாறே எளிதில் அறியலாம். இவ்வாறு a, e, i, Ω, ω, T ஆகிய மூலகங்கள் கணக்கிடப்பட்டன.

5·6. f-தொடரும், g-தொடரும்

ஒரு விண்பொருளின் இருப்பிடம், திசைவேகம் ஆகியவற்றை குறிப்பிட்ட நேரத்திற்கு அறிந்திருப்பின் அவற்றினின்று, அப்பொருளின் இருப்பிடத்தை மற்ற நேரங்களுக்கு அறிய முடியும்.

கால அளவையைத் தகுந்தபடி எடுத்துக்கொண்டால், $k = 1$ என்று கொள்ள இயலும் என ஏற்கெனவே கூறப்பட்டது. இதன்படி, சூரியனிலிருந்து விண்பொருளுக்கான ஆரை வெக்டர் $\vec{\mathbf{r}}$ எனில், அப்பொருளின் இயக்கச் சமன்பாடு $\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}$ ஆகும். $t = 0$ என்ற நேரத்தில் $\mathbf{r}$ன் மதிப்பு $\mathbf{r}_0$, $\dot{\mathbf{r}}$ ன், மதிப்பு $\dot{\mathbf{r}}_0$, ...என்று எடுத்துக்கொண்டால், டேலர் தேற்றப்படி,

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\,\dot{\mathbf{r}}_0 + \frac{t^2}{2}\,\ddot{\mathbf{r}}_0 + \frac{t^3}{6}\,\dddot{\mathbf{r}}_0 + \ldots\ldots\ldots$$

இப்போது σ , T , ω என்ற மூன்று எண்களை

$$\frac{1}{r_0^3} = \sigma, \frac{\dot{r}_0}{r_0} = T, \frac{\dot{r}_0^2}{r_0^2} = \omega$$

என்றபடி எடுத்துக்கொண்டால்

$$-3 \log r_0 = \log \sigma$$

$$\therefore \frac{3}{r_0}\dot{r}_0 = \frac{\dot{\sigma}}{\sigma}$$

$$\therefore \dot{\sigma} = -3\sigma T$$

$$T = \frac{\dot{r}_0}{r_0} = \frac{\mathbf{r}_0 \cdot \dot{\mathbf{r}}_0}{r_0^2}$$

$$\therefore \frac{dT}{dt} = \frac{-2\,\mathbf{r}_0 \cdot \dot{\mathbf{r}}_0}{r_0^3}\dot{r}_0 + \frac{1}{r_0^2}(\mathbf{r}_0 \cdot \ddot{\mathbf{r}}_0 + \dot{\mathbf{r}}_0 \cdot \dot{\mathbf{r}}_0)$$

$$= \frac{-2\,(Tr_0^2)}{r_0^3}(Tr_0) + \frac{1}{r_0^2}\mathbf{r}_0 \cdot \left(-\frac{\mathbf{r}_0}{r_0^3}\right) + w$$

$$= -2T^2 - \frac{\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}_0}{r_0^5} + w$$

$$= -2T^2 - \frac{1}{r_0^3} + w$$

$$= -2T^2 - \sigma + w$$

$$\dot{w} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{r}_0 \cdot \dot{\mathbf{r}}_0}{r_0^2}\right)$$

$$= \frac{-2\dot{r}_0}{r_0^3}(\dot{\mathbf{r}}_0 \cdot \dot{\mathbf{r}}_0) + \frac{2\dot{\mathbf{r}}_0 \cdot \ddot{\mathbf{r}}_0}{r_0^2}$$

$$= -2\left(\frac{\dot{r}_0}{r_0}\right)\left(\frac{\dot{r}_0 \cdot \dot{r}_0}{r_0^2}\right) + \frac{2\dot{\mathbf{r}}_0 \cdot \left(-\frac{\mathbf{r}_0}{r_0^3}\right)}{r_0^2}$$

$$= -2Tw - 2\left(\frac{\dot{\mathbf{r}}_0 \cdot r_0}{r_0^2}\right) \cdot \frac{1}{r_0^3}$$

$$= -2Tw - 2w\sigma$$

இப்போது

$$\ddot{\mathbf{r}}_0 = -\frac{\mathbf{r}_0}{r_0^3} = -\sigma \mathbf{r}_0$$

இதனை வகையிடுக :

$$\dddot{\mathbf{r}}_0 = -\sigma\dot{\mathbf{r}}_0 - \dot{\sigma}\,\mathbf{r}_0$$

$$= -\sigma\dot{\mathbf{r}}_0 - (-3\sigma T)\mathbf{r}_0$$

$$= 3\sigma T\mathbf{r}_0 - \sigma\dot{\mathbf{r}}_0$$

$$\therefore \quad \ddddot{\mathbf{r}} = \sigma T\dot{\mathbf{r}}_0 + 3\sigma\dot{T}\mathbf{r}_0 + 3\dot{\sigma}T\mathbf{r}_0 - \sigma\ddot{\mathbf{r}}_0 - \dot{\sigma}\,\dot{\mathbf{r}}_0$$

$$= 3\sigma T\dot{\mathbf{r}}_0 + 3\sigma\,(w - \sigma - 2T^2)\,\mathbf{r}_0 + 3\,(-3\sigma T)\,T\mathbf{r}_0$$
$$-\sigma\,(-\sigma\mathbf{r}_0) - (-3\,\sigma T)\,\dot{\mathbf{r}}_0$$

$$= (3\sigma w - 2\sigma^2 - 15\sigma T^2)\,\mathbf{r}_0 + 6\sigma T\dot{\mathbf{r}}_0$$

இவ்வாறே $\mathbf{r}_0$ன் மேற்படி (higher order) வகைக் கெழுக்களையும் பெறலாம். இவற்றினை (1)ல் பிரதியிட,

$$\mathbf{r} = f\mathbf{r}_0 + g\dot{\mathbf{r}}_0 \qquad (2)$$

என்றாகும். இங்கு

$$f = 1 - \tfrac{1}{2}\sigma t^2 + \tfrac{1}{2}\sigma T t^3 + \tfrac{1}{24}\,\sigma\,(3w - 2\sigma - 15T^2)\,t^4 + \cdots\cdots\cdots \qquad (3)$$

$$g = t - \tfrac{1}{6}\,\sigma t^3 + \tfrac{1}{4}\sigma T t^4 + \qquad (4)$$

(2)ம் சமன்பாடு, tன் வெவ்வேறு மதிப்புகளுக்கு $\mathbf{r}$ன் மதிப்புகளைத் தருகிறது. (3), (4)ம் சமன்பாடுகளை முறையே f-தொடர், g-தொடர் என்று குறிப்பிடுவர்.

5·7 கிப்ஸ் சமன்பாடு

ஒரு விண்பொருளின் இருப்பிடங்கள் t_1, t_2, t_3 என்ற நேரங்களில் $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$ என்க. $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$ என்ற வெக்டர்களுக்கு இடையே ஒரு சமன்பாட்டை கிப்ஸ் (Gibbs) என்பவர் தருவித்துள்ளார்.

$$\mathbf{r} = \mathbf{a}+\mathbf{b}\,t+\mathbf{c}\,t^2+\mathbf{d}\,t^3+\mathbf{e}\,t^4 \tag{1}$$

என்க. இங்கு $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$.........என்பன மாறிலி வெக்டர்கள் ; ஆனால் அவற்றின் மதிப்பு நமக்குத் தெரியாது. மேலும் t ன் நான்குக்கு மேற்பட்ட அடுக்குகளைத் தள்ளிவிடலாம் என்று கொள்க. இருமுறை வகைப்படுத்த,

$$\ddot{\mathbf{r}} = 2\,\mathbf{c}+6\,\mathbf{d}\,t+12\,\mathbf{e}\,t^2 \tag{2}$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3} \tag{3}$$

என்பதால் இதனை

$$-\frac{\mathbf{r}}{r^3} = 2\,\mathbf{c}+6\mathbf{d}\,t+12\mathbf{e}\,t^2 \tag{4}$$

என்று எழுதலாம். t_2 ஐப் பூச்சியமாக எடுத்துக்கொள்ள இயலும். அப்போது t_1, 0, t_3 நேரங்களில் $\mathbf{r}$ன் மதிப்புகள் $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$ என்று (1) இலும் (4) இலும் பிரதியிடுக. கிடைப்பவை.

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{a}+\mathbf{b}\,t_1+\mathbf{c}\,t_1^2+\mathbf{d}\,t_1^3+\mathbf{e}\,t_1^4$$

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{a}$$

$$\mathbf{r}_3 = \mathbf{a}+\mathbf{b}\,t_3+\mathbf{c}\,t_3^2+\mathbf{d}\,t_3^3+\mathbf{e}\,t_3^4$$

$$-\frac{\mathbf{r}_1}{r_1^3} = 2\mathbf{c} + 6\mathbf{d}\,t_1 + 12\mathbf{e}\,t_1^2$$

$$-\frac{\mathbf{r}_2}{r_2^3} = 2\mathbf{c}$$

$$-\frac{\mathbf{r}_3}{r_3^3} = 2\mathbf{c} + 6\mathbf{d}\,t_3 + 12\mathbf{e}\,t_3^2$$

இந்த ஆறு சமன்பாடுகளிலிருந்து **a**, **b**, **c**, **d**, **e** ஐ நீக்கிவிட

$$\begin{vmatrix} \mathbf{r}_1 & 1 & t_1 & t_1^2 & t_1^3 & t_1^4 \\ \mathbf{r}_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{r}_3 & 1 & t_3 & t_3^2 & t_3^3 & t_3^4 \\ -\dfrac{\mathbf{r}_1}{r_1^3} & 0 & 0 & 2 & 6t_1 & 12t_1^2 \\ -\dfrac{\mathbf{r}_2}{r_2^3} & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -\dfrac{\mathbf{r}_3}{r_3^3} & 0 & 0 & 2 & 6t_3 & 12t_3^2 \end{vmatrix} = 0$$

என்ற உருவக அணிக்கோவை (symbolic determinant) ச் சமன்பாடு கிடைக்கும். இதனை விரிவுபடுத்தினால்

$$\mathbf{r}_1 \left\{ t_3 + \frac{t_3}{12r_1^3}(t_1^2 - t_1t_3 - t_3^2) \right\} - \left\{ t_1 - \frac{t_1}{12r_3^3}(t_1^2 + t_1t_3 - t_3^2) \right\} \mathbf{r}_3$$

$$= (t_3 - t_1) \left\{ 1 - \frac{1}{12r_2^3}(t_1^2 - 3t_1t_3 + t_3^2) \right\} r_2 \qquad (5)$$

என்ற சமன்பாடு கிடைக்கிறது. இதனை

$$c_1\mathbf{r}_1 + c_3\mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_2 \qquad (6)$$

என்று கொள்க. $t_2 = 0$ என்பதால்

$$T_1 = t_3 - t_2 = t_3$$
$$T_2 = t_3 - t_1$$
$$T_3 = t_2 - t_1 = -t_1$$

என்று பிரதியிடுக. $t_1 < t_2 < t_3$ எனில் T_1, T_2, T_3 என்பன மிகை எண்கள். இப்போது (5), (6) சமன்பாடுகளை ஒப்பிட்டால்

$$C_1 = \frac{T_1\left(1 + \dfrac{B_1}{r_1^3}\right)}{T_2\left(1 - \dfrac{B_2}{r_2^3}\right)} \qquad (7)$$

$$C_3 = \frac{T_3\left(1 + \dfrac{B_3}{r_3^3}\right)}{T_2\left(1 - \dfrac{B_2}{r_2^3}\right)} \qquad (8)$$

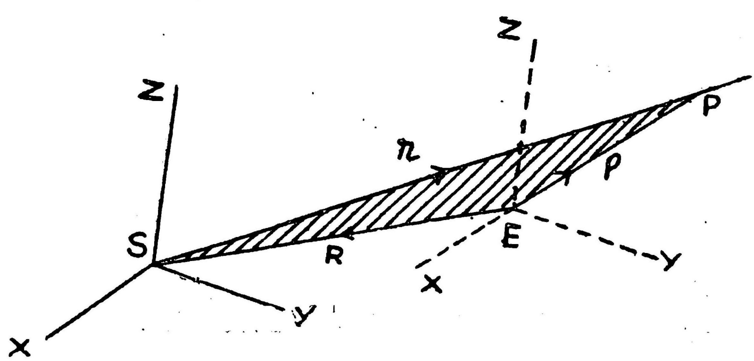
என்று அறியலாம். இங்குள்ள சுருக்குமுறைகள் விடப்பட்டுள்ளன.

5·8 பாதைக் கணிப்பு: லாபிளாசு முறை:

புதிய விண்பொருள்களை நாம் பூமியிலிருந்து நோக்குங்கால், பொதுவில் அவற்றின் வல ஏற்றம், சரிவுக்கோணம் இவற்றைக் கொண்டே வானில் அவற்றைக் குறிப்பிடுகிறோம். பூமியின் மையத்திலிருந்து அவற்றுக்கு உள்ள தூரம் நமக்குத் தெரியாது. சூரியனிலிருந்து அவற்றுக்குள்ள தூரத்தையும் அறியோம். மேலும் அவற்றின் திசைவேகத்தைப் பற்றியும் நமக்கு ஒன்றும் தெரியாது. சுருங்கக் கூறுமிடத்து, சூரியனைச் சுற்றி அப் பொருளின் பாதைகள் எவ்வகை இருபடி வளைவுகள் என்றுகூட நமக்குத் தெரியாது.

இந்நிலையில் அவற்றின் பாதைகளைக் கணக்கிடுவது எங்ஙனம்? சென்ற நூற்றாண்டுத் துவக்கத்தில் லாபிளாசு (Laplace) என்பவர் இதற்கு விடைகாண முன்வந்தார். விண்பொருளின் மூன்று நிலைகளில் அதன் வல ஏற்றங்களையும் சரிவுக்கோணங்களையும் பார்வையிட்டால், அவற்றிற்கிசைந்த நேரங்களையும் அறிந்தால், அப் பொருளின் பாதையைச் சுமாராகக் கணக்கிடும் முறை ஒன்றினை லாபிளாசு தந்துள்ளார். அதனை இப்போது விவரிப்போம்.

நேரங்கள் t_1, t_0, t_3 என்ற நிலைகளில் விண்பொருளின் வல ஏற்றங்கள் முறையே α_1, α_0, α_3, சரிவுக் கோணங்கள் முறையே δ_1, δ_0, δ_3 என்க. நடுக்கோட்டு அச்சுகளை மேற்கொள்க. t நேரத்தில் பூமியிலிருந்து சூரியனுக்குள்ள திசைத்தூரம் $\mathbf{R}$, விண்பொருளின் திசைத் தூரம் $\mathbf{r}$, பூமியிலிருந்து விண்பொருளின் திசைத்தூரம் ρ என்க.



படம் 5·5

படத்தில் S, E, P என்பன முறையே சூரியன், பூமி, விண்பொருள் ஆகியவற்றைக் குறிக்கும்.

$$\mathbf{r} = -\mathbf{R} + \rho \qquad (1)$$

$\mathbf{u}$ என்பது $\overrightarrow{EP}$ திசையில் அலகு வெக்டர் என்க.

$$\mathbf{P} = \rho \mathbf{u} \tag{2}$$

$\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ என்பன அச்சுத்திசையில் அலகு வெக்டர்கள் என்க. பூமியிலிருந்து பார்க்கும் போது விண்பொருளின் வல ஏற்றம் α, சரிவுக் கோணம் δ எனில், $(\rho, 90-\delta, \alpha)$ என்பது அப்பொருளின் ஆரைக்கோணக் கூறுகளாகும். எனவே

$$\mathbf{u} = \cos\delta \cos\alpha\ \mathbf{i} + \cos\delta \sin\alpha\ \mathbf{j} + \sin\delta\ \mathbf{k} \tag{3}$$

t_1, t_0, t_3 நேரங்களில் $\mathbf{u}$ ன் மதிப்பு முறையே $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_0$, $\mathbf{u}_3$ என்க. (1), (2) சமன்பாடுகளிலிருந்து

$$\mathbf{r} = \rho\mathbf{u} - \mathbf{R} \tag{4}$$

(4) ஐ வகைப்படுத்துக :

$$\dot{\mathbf{r}} = \rho\dot{\mathbf{u}} + \dot{\rho}\mathbf{u} - \dot{\mathbf{R}} \tag{5}$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\rho}\mathbf{u} + 2\dot{\rho}\dot{\mathbf{u}} + \rho\ddot{\mathbf{u}} - \ddot{\mathbf{R}} \tag{6}$$

விண்பொருளின் திணிவு மிகச்சிறியது என்று கொள்க. பூமியின் திணிவு m என்க.

விண்பொருளின் இயக்கச் சமன்பாடு $\ddot{\mathbf{r}} = -k^2 \dfrac{\mathbf{r}}{r^3}$ (7)

பூமியின் இயக்கச் சமன்பாடு $\ddot{\mathbf{R}} = \dfrac{-k^2(1+m)\mathbf{R}}{R^3}$ (8)

(6), (7), (8) இலிருந்து பெறுவது

$$\frac{-k^2\mathbf{r}}{r^3} = \ddot{\rho}\mathbf{u} + 2\dot{\rho}\dot{\mathbf{u}} + \rho\ddot{\mathbf{u}} + \frac{\mathbf{R}}{R^3} k^2(1+m)$$

அதாவது,

$$-k^2\left(\frac{\rho\mathbf{u}-\mathbf{R}}{r^3}\right) = \ddot{\rho}\mathbf{u} + 2\dot{\rho}\dot{\mathbf{u}} + \rho\ddot{\mathbf{u}} + \frac{\mathbf{R}}{R^3} k^2(1+m)$$

இதனை,

$$\left(\ddot{\rho} + \frac{k^2\rho}{r^3}\right)\mathbf{u} + 2\dot{\rho}\dot{\mathbf{u}} + \rho\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{R}\left\{\frac{k^2}{r^3} - \frac{k^2(1+m)}{R^3}\right\} \tag{9}$$

வெக்டர் சமன்பாட்டில் ρ, $2\dot{\rho}$, $\ddot{\rho} + \dfrac{k^2\rho}{r^3}$ ஆகியவை கண்டுபிடிக்கப்படவேண்டியவை என்று கொள்க. (9) ல் இருபுறமும் $\dot{\mathbf{u}} \times \mathbf{u}$ உடன் புள்ளிப் பெருக்கல் செய்க.

$$\rho\,[\ddot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{u}] = \left(\frac{k^2}{r^3} - \frac{k^2(1+m)}{R^3}\right)[\mathbb{R}, \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{u}]$$

$$\therefore\ \rho = k^2\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1+m}{R^3}\right)\frac{[\mathbb{R}, \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{u}]}{[\ddot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{u}]}$$

$$\rho = A + \frac{B}{r^3} \tag{10}$$

எனில், $A = \dfrac{-k^2(1+m)}{R^3}\dfrac{[\mathbb{R}, \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{u}]}{[\ddot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{u}]}$ (11)

$$B = \frac{k^2[\mathbb{R}, \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{u}]}{[\ddot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{u}]} \tag{12}$$

தேசியப் பஞ்சாங்களில் அன்றுடம் சூரியனின் தூரமும், சூரியனின் வல ஏற்றம், சரிவுக்கோணம் ஆகியவையும் தரப்பட்டுள்ளன. இவற்றிலிருந்து $\mathbb{R}$, R ஆகியவை எடுத்துக் கொள்ளப் படும்.

$$t_1' = t_1 - t_0$$

$$t_3' = t_3 - t_0$$

என்று கொள்க. $\mathbf{u}$ என்பது t ன் சார்பு ஆதலால் டேலர் தேற்றத்தின் படி

$$\mathbf{u}_1, = \mathbf{u}_0 + \dot{\mathbf{u}}_0 t_1' + \tfrac{1}{2}\ddot{\mathbf{u}}\, t_1'^2 + \dots\dots\dots \tag{13}$$

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_0 + \dot{\mathbf{u}}_0 t_3' + \tfrac{1}{2}\ddot{\mathbf{u}}_0\, t_3'^2 + \dots\dots\dots \tag{14}$$

t'_1, t'_3 என்பவை மிகச் சிறியவை. ஆகவே அவற்றின் இரண்டுக்கு மேற்பட்ட அடுக்குகளை விட்டுவிடலாம் என்று கொள்க. (13), (14) சமன்பாடுகள்

$$\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_0 = \dot{\mathbf{u}}_0 t_1' + \tfrac{1}{2}\ddot{\mathbf{u}}_0\, t_1'^2 \tag{15}$$

$$\mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_0 = \dot{\mathbf{u}}_0 t_3' + \tfrac{1}{2}\ddot{\mathbf{u}}_0\, t_3'^2 \tag{16}$$

என்று ஆகும். இங்கு, $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_0$, $\mathbf{u}_3$, t_1', t_3' என்பன தெரிந்தவை ஆதலால் இவற்றிலிருந்து $\dot{\mathbf{u}}_0$, $\ddot{\mathbf{u}}_0$ ஆகியவைகளைப் பெறலாம்.

இவ்விதமாக (11), (12) சமன்பாடுகளின் மூலம் A, B ன் மதிப்புகள் தெரிகின்றன.

SEP என்ற முக்கோணத்திலிருந்து

$$r^2 = R^2 + \rho^2 - 2\rho\mathbf{u}\cdot\mathbb{R} \tag{17}$$

என்று அறியலாம். $t = t_0$ என்ற நேரத்தில் (10), (17) சமன்பாடு களிலிருந்து

$$\rho_0 = A + \frac{B}{r_0^3} \tag{18}$$

$$r_0^2 = R_0^2 + \rho_0^2 - 2\rho_0 (\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{R}_0) \tag{19}$$

என்ற சமன்பாடுகள் பெறப்படும். இவற்றிலிருந்து ρ_0 ஐ நீக்க,

$$r_0^2 = R_0^2 + \left(A + \frac{B}{r_0^3}\right)^2 - 2\left(A + \frac{B}{r_0^3}\right)(\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{R}_0)$$

அதாவது

$$r_0^8 - (R_0^2 + A^2 - 2A\mathbf{u}_0 \cdot R_0)\, r_0^6 - 2B\,(A - \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{R}_0)\, r_0^3 - B^2 = 0$$

இச்சமன்பாட்டிற்கு நான்கு மெய்யெண் தீர்வுகள் உள்ளன ; அவற்றி லொன்று குறையெண் தீர்வு. மற்றொன்று R_0. மற்ற இரண்டில் ஒன்றே நமக்குத் தேவையான தீர்வு. வான இயல் வல்லுனர்கள் இவற்றைப் பற்றி மிக ஆழ்ந்து ஆராய்ந்துள்ளனர்.

இவ்விதமாக r_0 ஐயும் ρ_0 ஐயும் அறிந்த பின்னர் $\rho_0 \mathbf{u}_0$ ஒரு தெரிந்த வெக்டராகி விடுகிறது. அடுத்தபடியாக $\dot{\rho}_0$ ஐக் கணக்கிடு வோம். (9)ம் சமன்பாட்டில் இருபுறமும் $\mathbf{u} \times \ddot{\mathbf{u}}$ உடன் புள்ளிப் பெருக்கல் செய்க.

$$2\,\dot{\rho}\,[\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{u}, \ddot{\mathbf{u}}] = k^2\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1+m}{\mathbf{R}^3}\right)[\mathbf{R}, \mathbf{u}, \ddot{\mathbf{u}}] \tag{21}$$

என்று கிடைக்கும். எனவே $t = t_0$ எனில்

$$\dot{\rho}_0 = \frac{k^2\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1+m}{R^3}\right)[\mathbf{R}, \mathbf{u}, \ddot{\mathbf{u}}]}{2[\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{u}, \ddot{\mathbf{u}}]} \tag{22}$$

இவ்விதமாக $\dot{\rho}_0$ கணக்கிடப்படுகிறது. இப்போது 4 , 5 சமன்பாடு களிலிருந்து,

$$\mathbf{r}_0 = \rho_0 \mathbf{u}_0 - \mathbf{R}_0 \tag{23}$$

$$\dot{\mathbf{r}}_0 = \rho_0 \dot{\mathbf{u}}_0 + \dot{\rho}_0 \mathbf{u}_0 - \dot{\mathbf{R}}_0 \tag{24}$$

என்றறிகிறோம். இவற்றை **5·6**, சமன்பாடு 2ல் பிரதியிட, கொடுத் துள்ள எந்த நேரம் tக்கும் $\mathbf{r}$ ஐக் கணக்கிட முடிகிறது.

கொடுத்துள்ள t_0 நேரத்திற்கு விண்பொருளின் நடுக்கோட்டு முறை மூலகங்களை அறியவேண்டுமாயின் **5·5**ல் விவரித்த முறைப்படிச் செயல்படலாம்.

மேலே விவரித்த லாபிளாசு முறையில் இயக்கச் சமன்பாடுகள் அறுதியாக (தோராயமாக அல்ல) சரி செய்யப்படுகின்றன. ஆனால் $t=t_1$, $t=t_3$ என்ற நேரங்களுக்கிசைவாகக் கணக்கிடப்பட்ட $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_3$ என்பவை பார்வை மதிப்புகளுக்குச் சமமாக இருக்கவேண்டியது அவசியமில்லை. ஏனெனில் சமன்பாடுகள் (15), (16) லிருந்து $\dot{\mathbf{u}}_0$, $\ddot{\mathbf{u}}_0$ தோராயமாகவே எடுத்துக்கொள்ளப்பட்டன. ஆகவே கணக்கிடப்பட்ட $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_3$ன் மதிப்புகள் $\mathbf{r}_0$, $\dot{\mathbf{r}}_0$ ஐச்சரி செய்து இயக்க விதிகளின்படி இயங்கும் ஒரு பொருளின் இருப்பிடங்களைக் குறிப்பிடுகின்றனவேயன்றி, நாம் கவனித்து வரும் பொருளின் பார்வை இருப்பிடங்களை அல்ல. ஆயினும் இம்முறைப்படிக் கணிக்கப்படும் பாதையை முதற்படித் தோராயப் பாதை (Preliminary orbit)யாக கொள்வதில் தவறில்லை.

5·9 பாதைக் கணிப்பு : கவுசு முறை

லாபிளாசு முறையில் $\mathbf{r}_0$ன் மதிப்பு தோராயமாக எடுத்துக் கொள்ளப்பட்டது. ஆனால் இயக்கச்சமன்பாடுகள் அறுதியாகப் பயன்படுத்தப்பட்டன. இந்நிலையை மாற்றி, வடிவ கணிதக் கோட்பாடுகளை அறுதியாகச் சரி செய்யுமாறு $\mathbf{r}$ன் மதிப்பைப் பெற கவுசு ஒரு முறையைத் தந்துள்ளார். அதனை இப்போது விவரிப்போம்.

விண்பொருளின் பாதை சூரியன் வழியே செல்லும் ஒரு தளத்தில் அமையும். ஆகவே $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$ ஆகியவை

$$\mathbf{r}_2 = c_1 \mathbf{r}_1 + c_3 \mathbf{r}_3 \tag{1}$$

என்ற சமன்பாட்டின்படி தொடர்பு கொண்டிருக்கும். இருபுறமும் $\mathbf{r}_3$ உடன் குறுக்குப் பெருக்கல் செய்ய

$$\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3 = c_1 \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_3 \tag{2}$$

எனவே $$c_1 = \frac{|\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3|}{|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_3|} \tag{3}$$

இவ்வாறே $$c_3 = \frac{|\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_1|}{|\mathbf{r}_3 \times \mathbf{r}_1|} \tag{4}$$

$\frac{1}{2} \, |\mathbf{r}_i \times \mathbf{r}_j|$ என்பது $\mathbf{r}_i$, $\mathbf{r}_j$ என்ற வெக்டர்களை பக்கங்களாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் பரப்பளவு. இதனை $[r_i \, r_j]$ என்று

குறிப்பது வழக்கம் : இதன்படி,

$$c_1 = \frac{[r_2\, r_3]}{[r_1\, r_3]} \tag{5}$$

$$c_2 = \frac{[r_2\, r_1]}{[r_3\, r_1]} \tag{6}$$

$$\mathbf{r} = \rho \mathbf{u} - \mathbf{R} \tag{7}$$

என்பதால்

$$c_1\, \rho \mathbf{u}_1 - \rho_2\, \mathbf{u}_2 + c_3\, \rho_3\, \mathbf{u}_3 = c_1\, \mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2 + c_3\, \mathbf{R}_3 \tag{8}$$

இருபுறமும் $\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_3$யுடன் புள்ளிப்பெருக்கல் செய்ய

$$-\rho_2\, [\mathbf{u}_2\, \mathbf{u}_1\, \mathbf{u}_3] = c_1\, [\mathbf{R}_1\, \mathbf{u}_1\, \mathbf{u}_3] - [\mathbf{R}_2\, \mathbf{u}_1\, \mathbf{u}_3] + c_3\, [\mathbf{R}_3\, \mathbf{u}_1\, \mathbf{u}_3]$$

$$\rho_2 = \frac{[\mathbf{R}_2\, \mathbf{u}_1\, \mathbf{u}_3]}{[\mathbf{u}_2\, \mathbf{u}_1\, \mathbf{u}_3]} + c_1 \frac{[\mathbf{R}_1\, \mathbf{u}_1\, \mathbf{u}_3]}{[\mathbf{u}_1\, \mathbf{u}_2\, \mathbf{u}_3]} + c_3 \frac{[\mathbf{R}_3\, \mathbf{u}_1\, \mathbf{u}_3]}{[\mathbf{u}_1\, \mathbf{u}_2\, \mathbf{u}_3]} \tag{9}$$

$(\mathbf{r}_i\, \mathbf{r}_j)$ என்பது நீள்வளையப்பாதையில் $\mathbf{r}_i$, $\mathbf{r}_j$ ஆகியவை உட்கொள்ளும் கோணப்பகுதியின் பரப்பளவு (area of sector) என்க.

$$y_1 = \frac{(r_2\, r_3)}{[r_2\, r_3]},\ y_2 = \frac{(r_1\, r_3)}{[r_1\, r_3]},\ y_3 = \frac{(r_1\, r_2)}{[r_1\, r_2]} \tag{10}$$

$$c_1 = \frac{(r_2\, r_3)}{y_1} \div \frac{(r_1\, r_3)}{y_2}$$

$$= \frac{(r_2\, r_3)}{(r_1\, r_3)} \frac{y_2}{y_1} \tag{11}$$

கெப்ளரின் மூன்றும் விதிப்படி,

$$\frac{(r_2\, r_3)}{t_3 - t_2} = \frac{(r_1\, r_3)}{t_3 - t_1}$$

எனவே (11)ம் சமன்பாட்டை

$$c_1 = \frac{y_2\, (t_3 - t_2)}{y_1\, (t_3 - t_1)} \tag{12}$$

என்றெழுதலாம். இவ்வாறே

$$c_3 = \frac{y_2\, (t_2 - t_1)}{y_3\, (t_3 - t_1)} \tag{13}$$

y_1, y_2, y_3ன் மதிப்புகளை அறிந்திருந்தால், c_1, c_3ன் மதிப்புகள் இவ்விரு சமன்பாடுகளின் மூலம் பெறப்படும். y_iன் மதிப்புகளைப் பெறும் முறையொன்று பயிற்சியாகத் தரப்பட்டுள்ளது. இதன்படி

சிறு எண்களின் வர்க்கங்கள் வரை நிறுத்திக்கொண்டால் தோராயமாக,

$$c_1 = \frac{T_1}{T_2}\left\{1+\tfrac{1}{6}\,(T_2^2-T_1^2).\,\frac{k^2}{r_2^3}\right\} \qquad (14)$$

$$c_3 = \frac{T_3}{T_2}\left\{1+\tfrac{1}{6}\,(T_2^2-T_3^2)\,\frac{k^2}{r_2^3}\right\} \qquad (15)$$

என்று கிடைக்கும். இவற்றை (9)ல் பிரதியிட

$$\rho_2 = \frac{[\mathbf{R}_2\,\mathbf{u}_1\,\mathbf{u}_3]}{[\mathbf{u}_2\,\mathbf{u}_1\,\mathbf{u}_3]} + \left(\frac{T_1}{T_2} + \frac{k^2 T_1}{6\,T_2}\,(T_2^2-T_1^2)\,\frac{1}{r_2^3}\right)\frac{[\mathbf{R}_1\,\mathbf{u}_1\,\mathbf{u}_3]}{[\mathbf{u}_1\,\mathbf{u}_2\,\mathbf{u}_3]}$$

$$+\left(\frac{T_3}{T_2} + \frac{k^2 T_3}{6 T_2}\,(T_2^2-T_3^2).\,\frac{1}{r_2^3}\right)\frac{[\mathbf{R}_3\,\mathbf{u}_1\,\mathbf{u}_3]}{[\mathbf{u}_1\,\mathbf{u}_2\,\mathbf{u}_3]}$$

அதாவது

$$\rho_2 = A + \frac{B}{r_2^3} \qquad (16)$$

என்று பெறுவோம். மேலும் SEP முக்கோணத்திலிருந்து $t=0$ நேரத்தில் நாம் பெறுவது

$$r_2^2 = \rho_2^2 + R_2^2 - 2\,(\mathbf{u}_2\cdot\mathbf{R}_2)\,\rho_2 \qquad (17)$$

இவ்விரண்டிலிருந்து முன்போலவே ρ_2, r_2 ஆகியவற்றைக் கண்டு பிடிக்கலாம். பிறகு (14), (15)ஐப் பயன்படுத்தி c_1, c_3 ஐக் கணிக்கலாம்.

(8)ம் சமன்பாட்டில் இருபுறமும் $\mathbf{u}_2\times\mathbf{u}_3$ யுடன் புள்ளிப்பெருக்கல் செய்தால்

$$c_1\,\rho_1\,[\mathbf{u}_1\,\mathbf{u}_2\,\mathbf{u}_3] = c_1\,[\mathbf{R}_1\,\mathbf{u}_2\,\mathbf{u}_3] + c_3\,[\mathbf{R}_3\,\mathbf{u}_2\,\mathbf{u}_3] \qquad (18)$$

(8)ல் இருபுறமும் $u_1\times u_2$ உடன் புள்ளிப்பெருக்கல் செய்தால்

$$c_3\,\rho_3\,[\mathbf{u}_3\,\mathbf{u}_1\,\mathbf{u}_2] = c_1\,[\mathbf{R}_1\,\mathbf{u}_1\,\mathbf{u}_2] - [\mathbf{R}_2\,\mathbf{u}_1\,\mathbf{u}_2] + c_3\,[\mathbf{R}_3\,\mathbf{u}_1\,\mathbf{u}_2] \qquad (19)$$

(18), (19)ம் சமன்பாடுகளிலிருந்து ρ_1, ρ_3 ஐக் கணிக்கலாம். பிறகு

$$\mathbf{r}_1 = \rho_1\,\mathbf{u}_1 - \mathbf{R}_1$$

$$\mathbf{r}_3 = \rho_3\,\mathbf{u}_3 - \mathbf{R}_3$$

என்ற சமன்பாடுகளிலிருந்து பிறகு $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_3$ ஆகிய வெக்டர்களை அறிய முடிகிறது.

இவ்வாறு c_1, c_2 ஐ அறிந்ததன் மூலம் $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_3$ ஐக் கணக்கிட முடிகிறது. c_1 c_2 ஐப் பெறும் சமன்பாடுகளான (14), (15) ஆகியவை இயக்கச் சமன்பாடுகளைப் பயன்படுத்திப் பெறப்பட்டவை. இவ்விரு சமன்பாடுகளும் தோராயமானவை என்பதைக் கவனிக்க. எனவே கவுசு முறையில் வடிவகணித நிபந்தனைகள் அறுதியாகச் சரிசெய்யப் படுகின்றன. ஆனால் இயக்கச் சமன்பாடுகள் (14), (15) மூலம் தோரயமாகவே சரிசெய்யப்படுகின்றன.

(14), (15)ம் சமன்பாடுகளின் மூலம் பெறப்படும் c_1, c_3ன் மதிப்புகள் தோராயமானவையாதலால் இவற்றிற்கு பதில் c_1, c_3ன் மதிப்புகளை அதி நுணுக்கமாகப் பெறும் வழிகள் உள்ளன. எடுத்துக் காட்டாக **5·7**ல் குறிபிட்டுள்ள (7), (8)ம் சமன்பாடுகளின் மூலம் கிடைக்கும் c_1, c_3ன் மதிப்புகள் வெகு நுணுக்கமானவை. இவற்றைப் பயன்படுத்திக் கணக்கிடப்படும் $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$ன் மதிப்புகளும் வெகு நுணுக்கமானவை.

நுணுக்கத்தை அதிகமாக்கும் விதங்களில், கோள் ஒளிப்பிறழ்ச்சி (Planetary aberration) க்குத் தகுந்தபடி திருத்தங்கள் செய்து கொள்வது ஒன்றாகும். நேரம் tல் விண்பொருளின் இருப்பிடம் $\mathbf{r}$ என்று காட்சிப்பதிவு செய்கையில் ஒளியானது அப்பொருளிலிருந்து பூமிக்கு வந்துசேர ஆகும் நேரத்தைக் கழித்துவிட வேண்டுமல்லவா? ஒளியின் வேகம் c எனில் $\left(t-\dfrac{\rho}{c}\right)$ நேரத்தில் விண்பொருளின் திசை வெக்டர் $\mathbf{r}$ என்று கொள்வதே சரி. இம் மாற்றத்தையே கோள் ஒளிப் பிறழ்ச்சி என்று குறிப்பிடுகிறோம். ஒளியானது சூரியனிலிருந்து பூமிக்கு வந்து சேருவதற்கு 498.5 செகண்டுகள் ஆகின்றன. அதாவது ·00577 நாள் ஆகிறது. எனவே

$$\text{சரியான நேரம்} = \text{பார்வை நேரம்} - 498{\cdot}5\,\rho$$

இங்கு நேரம் செகண்டுகளில் குறிப்பிடப்படுகிறது.

அடுத்தபடியாக பார்வையாளர் பூமியின் மேற்பரப்பிலிருக்கிறார். ஆனால் தேசீயப் பஞ்சாங்கங்களில் உள்ள $\mathbf{R}$, $\dot{\mathbf{R}}$ பூமியின் மையப் புள்ளியைக் குறிக்கின்றன. இதனால் பார்வை வல ஏற்றம், சரிவுக் கோணம் ஆகியவற்றில் பிழை ஏற்படுகிறது. இதனை இடமாறு தோற்றம் (parallax) என்போம். இடமாறு தோற்றத்திற்குத் திருத்தங்கள் பின் வருமாறு. இவை பார்வை மதிப்புகளுடன் கூட்டப்பட வேண்டும்.

$$\Delta\alpha = \frac{8{\cdot}8\,a' \cos\phi \sin(\theta-\alpha)}{15\rho a \cos\delta}$$

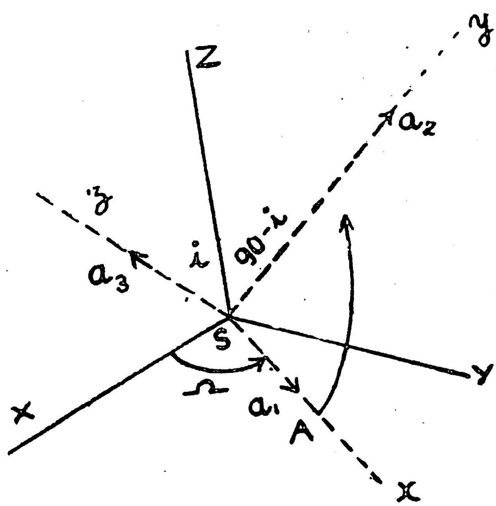
$$\triangle\delta = \frac{8{\cdot}8\, a' \sin\phi \sin(A-\delta)}{\rho a \sin A}$$

$$\tan A = \frac{\tan\phi}{\cos(\theta-\alpha)}$$

இங்கு a' என்பது பூமியின் மையப்புள்ளியிலிருந்து பார்வையிடத்திற்குள்ள தூரம். a என்பது பூமியின் நடுக்கோட்டு ஆரம். ϕ என்பது பார்வையிடத்தின் குறுக்குக்கோணம் (latitude) ρ, α, δ என்பன முறையே விண்பொருளின் தூரம் (பூமிமையத்திலிருந்து), வல ஏற்றம், சரிவுக்கோணம். θ என்பது பார்வையிடத்தின் மீன்வழி நேரம் (Siderial time).

5·10 மூன்று தூரங்களிலிருந்து மூலங்களைக் கணக்கிடுதல்

ஒரு விண்பொருளின் பரிதிமையத்திசைத் தூரங்கள், t_1, t_2, t_3 நேரங்களில் முறையே $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$ என்க. இப்போது விண்பொருளின் மூலகங்களைக் கணக்கிடும் முறையை விவரிப்போம்.



படம் 5·6

A என்பது ஏறுகோள் சந்திப்புள்ளி, S என்பது சூரியன் என்க. SA என்னும் x அச்சையும், SAக்குச் செங்குத்தாக பாதைத்தளத்தில் SY என்னும் y அச்சையும், பாதைத்தளத்துக்குக் குத்துக்கோடாக SZ அச்சையும் எடுத்துக்கொள்க. $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ என்பன Ox, Oy, Oz திசைகளில் அலகு வெக்டர்கள் என்க.

$$\angle XOA = \Omega$$

என்பதால்

$$\mathbf{a}_1 = \cos\Omega\ \mathbf{i} + \sin\Omega\ \mathbf{j} \qquad (1)$$

yன் நெடுங்கோட்டுக்கோணம் $90+\Omega$. மேலும் Yz தளமானது SZ வழியே செல்கிறபடியால்,

$$\angle zSZ = i,\ \angle ySZ = 90 - i$$

எனவே

$$\mathbf{a}_2 = \sin(90-i)\cos(\Omega+90)\ \mathbf{i} + \sin(90-i)\sin(\Omega+90)\ \mathbf{j} + \cos(90-i)\ \mathbf{k}$$

அதாவது,

$$\mathbf{a}_2 = -\cos i\sin\Omega\ \mathbf{i} + \cos i\cos\Omega\ \mathbf{j} + \sin i\ \mathbf{k} \qquad (2)$$

$$\mathbf{a}_3 = \sin i\cos(\Omega+270)\ \mathbf{i} + \sin i\sin(\Omega+270)\ \mathbf{j} + \cos i\ \mathbf{k}$$

அதாவது,

$$\mathbf{a}_3 = \sin i\sin\Omega\ \mathbf{i} - \sin i\cos\Omega\ \mathbf{j} + \cos i\ \mathbf{k} \qquad (3)$$

$\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ என்பன பாதைத்தளத்தில் இரு வெக்டர்கள்

$$\frac{\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2|} = A_1\mathbf{i}+A_2\mathbf{j}+A_3\mathbf{k} \qquad (4)$$

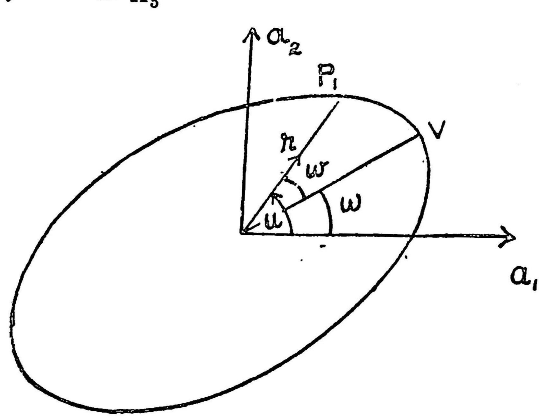
என்பது ஒரு அலகு வெக்டர். இதன் திசை $\mathbf{a}_3$ ன் திசையாதலால்

$$\mathbf{a}_3 = A_1\ \mathbf{i} + A_2\ \mathbf{j} + A_3\ \mathbf{k}$$

$$\therefore\quad \sin i\sin\Omega = A_1$$

$$-\sin i\cos\Omega = A_2$$

$$\cos i = A_3$$



படம் 5·7

அதாவது

$$\tan \Omega = - \frac{A_1}{A_2} \qquad (5)$$

$$\cos i = A_3 \qquad (6)$$

இவற்றிலிருந்து Ω , i ஆகியவற்றைக் கணக்கிடலாம்.

அடுத்தபடியாக பாதையின் சமன்பாடு

$$r = \frac{a\,(1-e^2)}{1+e \cos w}$$

அதாவது

$$r = \frac{a\,(1-e^2)}{1+e \cos(u-w)}$$

என்று நாமறிவோம்

$$\therefore \quad r+e \cos \omega\,(r \cos u) + e \sin \omega\,(r \sin u) = a\,(1-e^2)$$

இப்போது

$$r \cos u = \mathbf{r} \cdot \mathbf{a}_1 , \; r \sin u = \mathbf{r} \cdot \mathbf{a}_2$$

$$\therefore \quad r + e \cos \omega\,(\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}_1) + e \sin \omega\,(\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}_2) = a\,(1-e^2)$$

இதில் rக்கு r_1, r_2 என்று பிரதியிட,

$$\mathbf{r}_1 + e \cos w\,(\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{a}_1) + e \sin w\,(\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{a}_2) = a\,(1-e^2) \qquad (7)$$

$$\mathbf{r}_2 + e \cos w\,(\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{a}_1) + e \sin w\,(\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{a}_2) = a\,(1-e^9) \qquad (8)$$

(7) , (8) இலிருந்து

$$\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2 + e \cos w \{ (\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2) \cdot \mathbf{a}_1 \} + e \sin w \{ (\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2) \cdot \mathbf{a}_2 \} = 0 \qquad (9)$$

இவ்வாறே கிடைக்கக்கூடிய மற்றொரு சமன்பாடு

$$r_2-r_3+e \cos w \{ (\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_3) \cdot \mathbf{a}_1 \}+e \sin w \{ (\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2) \cdot \mathbf{a}_2 \}=0 \qquad (10)$$

ஆகும். (9) , (10)ம் சமன்பாடுகளிலிருந்து $e \cos w$, $e \sin w$ ஆகியவற்றைப் பெறலாம். தீர்வுகள் $e \cos w = A_4$, $e \sin w=A_5$ என்க

அப்போது,

$$\left. \begin{aligned} e &= \sqrt{A_4^2 + A_5^2} \\ \tan w &= \frac{A_5}{A_4} \end{aligned} \right\} \qquad (11)$$

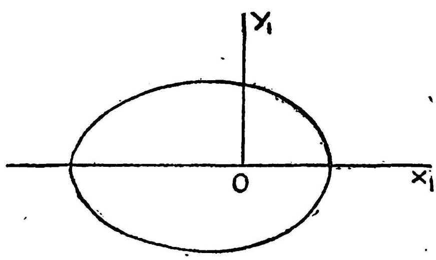
இப்போது (7)ம் சமன்பாட்டிலிருந்து a ஐக் கணக்கிடலாம். a ஐக் கொண்டு கெப்ளரின் (திருத்தப்பட்ட) மூன்றாவது விதியைப் பயன்

படுத்தி nஐ அறியலாம் பிற்கு $r_1 = a\ (1-e\cos E_1)$ என்ற சமன் பாட்டிலிருந்து E_1 ஐயும், கெப்ளரின் சமன்பாட்டிலிருந்து M_1 ஐயும் $t = t_1$ என்ற நேரத்திற்குப் பெறலாம். இப்போது $M_1 = n\ (t-T)$ என்ற சமன்பாடு Tஐத் தரும்.

இவ்வாறு பாதையின் மூலகங்கள் ஆறும் கணக்கிடப்படும்.

5·11 பஞ்சாங்கக் கணிப்பு முறை

கடைசியாகப் பஞ்சாங்கக் கணிப்பு முறையை விளக்குவோம். பஞ்சாங்கத்தில் அன்ருடம் விண்பொருள்களின் இருப்பிடங்களைக் கணக்கிட்டுத் தருகிருர்கள். இவை பொதுவில் பூமியின் ஓர் இடத்தின் பார்வைத் தலத்திற்கானவையாகும். விண்பொருளின் பல இடங்களில் கூறுகள் கணக்கிடப்படவேண்டியிருப்பதால், முதலில் பரிதிமையத் தோற்றப்பாதைக் கூறுகளைக் கணக்கிட்டுப் பிறகு பார்வை மையத்திற்கு மாற்றம் செய்யப்படுகிறது.



படம் 5.8

சூரியனை ஆதிப்புள்ளியாகக் கொள்க. $O\ X_1$, $O\ Y_1$ என்பன பாதையின் தளத்தில் அச்சுக்கோடுகள். $O\ X_1$ அண்மைப்புள்ளி வழியே செல்கிறது. $O\ Z_1$ ஆனது பாதைத் தளத்திற்குச்செங்குத்தாக உள்ளது என்க. E என்பது P எனும் விண்பொருளின் மையவகற்சிப் பிறழ்ச்சி எனில்

$$X_1 = a\cos E - a\,e$$

$$Y_1 = a\sqrt{1-e^2}\,\sin E$$

$$Z_1 = 0$$

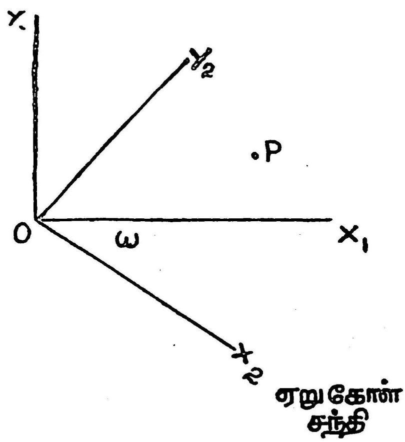
ஆகியவையே பொருளின் கூறுகள் Pன் கூறுவெக்டரை $\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix}$

என்று ஒரு நிரல் அணியாக எழுதிக்கொள்வோம்.

$O\ Z_1$ ஐச் சுற்றி மற்ற இரு அச்சுகளையும் இடஞ்சுழியாக (clockwire) w என்ற கோண அளவு சுற்றி, அச்சுகளின் புதிய

இடங்களை OX_2, OY_2, OZ_2 என்று குறித்தால் OX_2 ஆனது ஏறுகோள் சந்திப்புள்ளி வழியே செல்லும். OZ_2 பாதைத் தளத்திற்காக இருக்கும். இவ்வச்சுகளைப் பொறுத்து Pன் கூறுகள் (X_2, Y_2, Z_2) எனில்

$$X_2 = X_1 \cos w - Y_1 \sin w$$
$$Y_2 = X_1 \sin w + Y_1 \cos w$$
$$Z_2 = Z_1$$



படம் 5·9

இம்மாற்றத்தை

$$\begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos w & -\sin w & 0 \\ \sin w & \cos w & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix}$$

என்று எழுதுவோம்.

$$\begin{pmatrix} \cos w & -\sin w & 0 \\ \sin w & \cos w & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A$$

என்க.

இப்போது OX_2 ஐச்சுற்றி மற்ற இரு அச்சுகளையும் இடஞ்சுழியாக i என்ற கோண அளவு சுற்றி, OX_3, OY_3, OZ_3 ஐப் பெறுக. இப்போது OZ_3 ஆனது தோற்றப்பாதைக்குச் செங்குத்தாக அமையும்.

$$\begin{pmatrix} X_3 \\ Y_3 \\ Z_3 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & -\sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{pmatrix}$$

என்று குறித்துக்கொள்ளலாம்.

அடுத்தபடியாக, OZ_3 ஐச் சுற்றி மற்ற இரு அச்சுக்களையும் இடஞ்சுழியாக Ω என்ற கோண அளவு சுற்றி OX, OY, OZ என்ற தோற்றப்பாதைக் கூறுகளைப் பெறலாம். இம்மாற்றத்தை,

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} X_3 \\ Y_3 \\ Z_3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \cos\Omega & -\sin\Omega & 0 \\ \sin\Omega & \cos\Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

என்று குறிப்பிடலாம். இவ்விதமாக

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix}, \quad D = CBA$$

என்ற சமன்பாடு, பொருளின் பல்வேறு இடங்களின் தோற்றப் பாதைக் கூறுகளைக் கணக்கிட உதவுகிறது.

A, B, C ஒவ்வொன்றும் ஒரு செங்குத்து அணி என்பதைக் கவனிக்க. இரு செங்குத்து அணிகளின் பெருக்கற்பலனும் செங்குத்து அணியே என்பதால் $D=(d_{ij})$யும் ஒரு செங்குத்து அணி.

$$\therefore \sum_i d_{ij}\, d_{ik} = 0 \qquad j \neq k$$

$$= 1 \qquad j = k.$$

மேலும் $\det D = 1$. இவை நம் கணக்கீடுகளைச் சரிபார்க்க உதவும்.

சில சமயங்களில் தோற்றப்பாதை தளத்தை மாற்றிக்கொள்ள வேண்டி இருக்கலாம்; அல்லது சமஇரவுப் புள்ளியின் இடத்தில் மாற்றம் ஏற்படலாம். இந்நிலைகளில் X, Y, Z அச்சுகள், சூரியனைச் சுற்றிச் சிறிது சுழற்றப்பட வேண்டும். இச்சுழற்சியை E என்னும் ஒரு அணியினால் குறிப்பிட்டு, புதிய அச்சுக்களை SX', SY', SZ' என்று கொண்டால்

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

ஆகும். ஆகவே (X_1, Y_1, Z_1) ஆனது (X', Y', Z') என்று மாறுகிறது. இங்கு மாற்றும் அணி $ECBA$ ஆகும்.

அடுத்தபடியாக தோற்றப் பாதைக் கூறுக்குப் பதிலாக நடுக் கோட்டுக் கூறுகளைப் பெற வேண்டுமானால், SY', SZ' அச்சுக்களை SX' ஐச் சுற்றி இடஞ்சுழியாக ϵ கோண அளவு சுற்றவேண்டும். இங்கு ϵ என்பது தோற்றப்பாதையின் சரிவு (Obliquity of the ecliptic) புதிய அச்சுக்களை SX'', SY'', SZ'' என்று குறித்தால் மாற்று அணி

F ஆனது

$$\begin{pmatrix} X'' \\ Y'' \\ Z'' \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\epsilon & -\sin\epsilon \\ 0 & \sin\epsilon & \cos\epsilon \end{pmatrix}$$

என்றவாறு அமைகிறது. ஆகவே நீள்வட்டப்பாதையில் பொருளின் (X_1, Y_1, Z_1) கூறுகள் நடுக்கோட்டுக் கூறுகள் (X'', Y'', Z'') ஆக மாற்றப்பட்டன. இங்கு மாற்றஅணி $F\ E\ C\ B\ A$ ஆகும்.

இதுவரை பரிதிமையக் கூறுகளைப் பற்றியே கூறிவந்தோம். புவிமையக் கூறுகள் தேவைப்படின், இக்கூறுகளுடன், சூரியனின் புவிமையக் கூறுகளைக் கூட்டிக்கொள்ள வேண்டும். (x'', y'', z''), (X'', Y'', Z'') என்பன முறையே பொருளின் புவிமைய, பரிதிமைய நடுக்கோட்டுக் கூறுகள் என்க. சூரியனின் புவிமையக் கூறுகள் (x_0, y_0, z_0) எனில்,

$$x'' = X'' + x_0$$

$$y'' = Y'' + y_0$$

$$z'' = Z + '' z_0$$

புவியை நடுக்கோட்டுக் கூறுகளிலிருந்து, பொருளின் வல ஏற்றம், சரிவுக் கோணம் ஆகியவைகளைக் கணக்கிட

$$x'' = \rho \cos\delta \cos\alpha$$

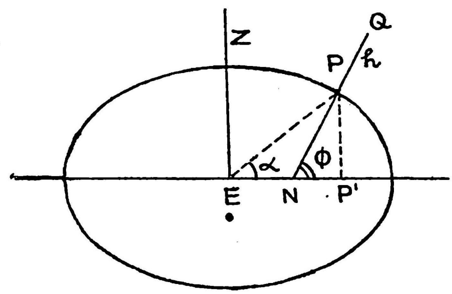
$$y'' = \rho \cos\delta \sin\delta$$

$$z'' = \rho \sin\delta$$

ஆகிய சமன்பாடுகள் பயன்படும்.

சில சமயங்களில், நுட்பமான கணிப்புகள் தேவைப்படும்போது, பார்வை இடத்தை ஆதிப்புள்ளியாகக் கொண்ட நடுக்கோட்டுக் கூறுகள் தேவைப்படலாம். பூமியைக் கோளவடிவம் கொண்டதாகக் கொள்க. பார்வை இடத்தின் புவிமீது குறுக்குக் கோட்டுக்கோணம் (geographic latitude) ϕ, உள்ளூர் மீன்வழிச் சராசரி நேரம் (local mean sidereal time) θ, பூமியின் ஆரம் a எனில், அப்பார்வை இடத்தில் புவிமைய நடுக்கோட்டுக் கூறுகள் $(a \cos\phi \cos\theta, a \cos\phi \sin\theta, a \sin\phi)$ ஆகும். இன்னமும் நுட்பமான கணக்கீடு களுக்கு பூமியைக் கோளமாகக் கொள்ளாமல், சர்வதேச நீள்வளைக் கோளமாகக் (International Ellipsoid) கொள்ளவேண்டும். இதன் நடுவட்ட ஆரம் (equatorial radius) a (=6378·388 கி.மீ), மட்டப் படுத்து எண் (flattening or ellipticity) $\frac{1}{297}$. எனவே இதன் மைய வகற்சி எண் $e = \sqrt{f(2-f)}$. இதன் மீதுள்ள ஒரு இடத்தின்

குறுக்குக் கோட்டுக் கோணம் ϕ என்பது, அவ்விடத்தில் நீள்வளையக் கோணத்திற்கு வரையப்பட்ட செங்கோட்டிற்கும், நடுவட்டத்



படம் 5·10

தளத்திற்கும் இடையே உள்ள கோணம். படம் ஒரு உச்சி வட்டத்தை (meridian)க் காட்டுகிறது. Pன் மைய வகற்சிக் கோணம் α. Q என்னும் பொருள் Pல் செங்கோட்டின்மேல் h உயரத்திலிருக்கிறது.

$$PN = bd, \quad b = a\sqrt{1-e^2}$$

எனில்

$$\tan\phi = \frac{a}{b}\tan\alpha,$$

$$d = \frac{1}{\sqrt{1-e^2\sin^2\phi}},$$

$$PN = \frac{b}{a}\sqrt{a^2\sin^2\alpha+b^2\cos^2\alpha}$$

எனவே,

$$EP' = a\cos\alpha$$

$$= a\frac{PN}{b}\cdot\frac{b\cos\alpha}{PN}$$

$$= a\cdot d\cdot\cos\phi$$

$$PP' = b\sin\alpha$$

$$= b.\frac{b\sin\phi}{\sqrt{a^2\cos^2\phi+b^2\sin^2\phi}}$$

$$= \frac{b^2\sin\phi}{a\sqrt{1-e^2\sin^2\phi}}$$

$$= a(1-e^2)\,d\sin\phi$$

இதனால் Q ன் கூறுகள் (x, y, z) எனில்,

$$x = (a\cos\alpha + h\cos\phi)\cos\theta$$
$$= (ad+h)\cos\phi\cos\theta$$
$$y = (a\cos\alpha + h\cos\phi)\sin\theta$$
$$= (ad+h)\cos\phi\sin\theta$$
$$z = ad(1-e^2)\sin\phi + h\sin\phi$$
$$= \{ad(1-e^2) + h\}\sin\phi$$

பயிற்சி

1. குறிப்பிட்ட நேரத்தில் ஒரு விண்பொருளின் திசைவிற்கோணம் (azimuth), ஏற்றக்கோணம் (altitude) ஆகியவை தந்திருப்பின், அதன் புவி மையக்கூறுகளை காண்பதெங்ஙனம் என்பதை விளக்குக.

2. (லாம்பர்ட்டின் தேற்றம்: (Lambert's theorem). r_1, r_2 என்பன ஒரு நீள்வட்டப்பாதையில் P_1 P_2 என்னும் இருபுள்ளிகளின் குவியத்தூரங்கள் ; E_1, E_2 மையவகற்சி நெறிப்பிறழ்ச்சிக் கோணங்கள், t என்பது P_1 இலிருந்து P_2 க்குச் செல்ல ஆகும் காலம் என்க. $e\cos\dfrac{E_1+E_2}{2} = \cos h$, $g = \dfrac{E_2-E_1}{2}$,
$\epsilon = h+g$, $\delta = h-g$ என்க.

$nt = \epsilon - \delta - (\sin\epsilon - \sin\delta)$ என்று நிரூபிக்க.

3. 5·9 ல் y_t ஐக் கணக்கிடும் முறையைப் பற்றி குறிப்பிடப்பட்டது $SP_1 P_2$ என்ற முக்கோணத்தின் பரப்பளவு $= \dfrac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1)$

$$= ab\left\{\sin(E_2-E_1) - 2e\cos\frac{E_2+E_1}{2}\sin\frac{E_2-E_1}{2}\right\}$$
$$= ab\left\{\sin(\epsilon-\delta) - (\sin\epsilon - \sin\delta)\right\}$$

இப்போது லாம்பர்ட்டு தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி

$$y_3 = \frac{\epsilon-\delta-(\sin\epsilon - \sin\delta)}{\sin(\epsilon-\delta) - (\sin\epsilon - \sin\delta)}$$

என்று காட்டுக.

4. ஒரு வால்நட்சத்திரத்தின் பரிதிமையத்தோற்றப் பாதைக் கூறுகள் $t_0 = 5$ எனும்போது (5, 12, 0) அதன் வேகக்கூறுகள் $\left(0, \sqrt{\dfrac{2}{13}}, 0\right)$. அதன் மூல கங்களைக் காண்க. $\mu = 1$ என்று கொள்க.

6. இயக்கவியல் கருத்துக்கள்
(Dynamical principles)

6.1 லாகிராஞ்சு சமன்பாடுகள்

இயக்கவியலின் சில பொதுத் தேற்றங்களும் வானஇயலில் பெரிதும் பயன்படுகின்றன. ஆமில்டனின் நியம சமன்பாடுகள் இங்கு வெகு முக்கியமானவை. லாகிராஞ்சு சமன்பாடுகளைப்பற்றி முதலில் சுருக்கமாக ஆராய்வோம்.

ஒரு துகளின் திணிவு m என்க. நேரம் t என்றபோது இத்துகள் (x, y, z) என்ற புள்ளியிலிருக்கட்டும். x, y, z என்ற இதன் கூறுகள் ஒவ்வொன்றும் $q_1, q_2, \ldots\ldots, q_n$ என்ற n பொதுப்படுத்திய கூறுகளில் (generalised co-ordinates) சார்புகளாக இருக்கட்டும். மேலும் x, y, z ஆகியவை tன் சார்புகளாகவும் இருக்கலாம்.

$$\left.\begin{aligned} x &= x(q_1, q_2 \ldots\ldots, q_n, t) \\ y &= y(q_1, q_2 \ldots\ldots, q_n, t) \\ z &= z(q_1\, q_2 \ldots\ldots, q_n, t) \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

இப்போது

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}$$

$$= \frac{\partial x}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \cdots\cdots + \frac{\partial x}{\partial q_n}\dot{q}_n + \frac{\partial x}{\partial t}$$

$$= \frac{\partial x}{\partial t} + \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial x}{\partial q_r}\dot{q}_r \quad (2)$$

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt}$$

$$= \frac{\partial y}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \cdots\cdots + \frac{\partial y}{\partial q_n}\dot{q}_n + \frac{\partial y}{\partial t}$$

$$= \frac{\partial y}{\partial t} + \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial q_r}\dot{q}_r \quad (3)$$

$$\dot{z} = \frac{\partial z}{\partial t}$$

$$= \frac{\partial z}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial z}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \cdots\cdots\cdots + \frac{\partial z}{\partial q_n}\dot{q}_n + \frac{\partial z}{\partial t}$$

$$= \frac{\partial z}{\partial t} + \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial z}{\partial q_r}\dot{q}_r \qquad (4)$$

(2)இலிருந்து

$$= \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_r} = \frac{\partial x}{\partial q_r} \quad r = 1, 2, 3 \ldots\ldots\ldots, n \qquad (5)$$

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial q_n} = \frac{\partial}{\partial q_n}\left(\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial x}{\partial q_s}\dot{q}_s + \frac{\partial x}{\partial t}\right)$$

$$= \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial^2 x}{\partial q_r \, \partial q_s}\dot{q}_s + \frac{\partial^2 x}{\partial q_r \, \partial t} \qquad (6)$$

$$\therefore \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_r}\left(\tfrac{1}{2} m\dot{x}^2\right) = m\frac{d}{dt}\left(\dot{x}\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_r}\right)$$

$$= m\left\{\dot{x}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_r}\right) + \ddot{x}\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_r}\right\}$$

(5)இலிருந்து பிரதியிட,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_r}\tfrac{1}{2} m\dot{x}^2\right) = m\left\{\dot{x}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial q_r}\right) + \ddot{x}\frac{\partial x}{\partial q_r}\right\}$$

$$= m\dot{x}\left\{\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial^2 x}{\partial q_r \, \partial q_s}\dot{q}_s + \frac{\partial^2 x}{\partial t \, \partial q_r}\right\} + m\ddot{x}\frac{\partial x}{\partial q_r}$$

எனவே

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_r}\left(\tfrac{1}{2} m\dot{x}^2\right) = m\dot{x}\frac{\partial \dot{x}}{\partial q_r} + m\ddot{x}\frac{\partial x}{\partial q_r} \qquad (7)$$

இத்துகளின் மீது தாக்கும் விசைகளின் மொத்தக் கூறு x திசையில் X எனில், இயக்கச் சமன்பாடு $m\ddot{x} = X$ அல்லவா? எனவே,

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_r}\left(\tfrac{1}{2}m\dot{x}^2\right)=m\dot{x}\frac{\partial \dot{x}}{\partial q_r}+X\frac{\partial x}{\partial q_r}\\
&\text{இவ்வாறே}\\
&\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_r}\left(\tfrac{1}{2}m\dot{y}^2\right)=m\dot{y}\frac{\partial \dot{y}}{\partial q_r}+Y\frac{\partial y}{\partial q_r}\\
&\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_r}\left(\tfrac{1}{2}m\dot{z}^2\right)=m\dot{z}\frac{\partial \dot{z}}{\partial q_r}+Z\frac{\partial z}{\partial q_r}
\end{aligned}\right\}\quad (8)$$

இப்போது $m_1, m_2, \ldots . m_n$ என்ற திணிவுகளுள்ள N துகள்கள் ஒரு விசைவெளியில் நகர்ந்து செல்வதாகக் கொள்க. m_i என்ற துகளின் இருப்பிடக் கூறுகள் (x_i, y_i, z_i) எனில் இத்துகள்களின் மொத்த இயக்கச் சக்தி (kinetic energy). T ஆனது,

$$T=\sum_{=1}^{X}\tfrac{1}{2}m_i(\dot{x}_i^2+\dot{y}_i^2+\dot{z}_i^2)$$

(8) ஐப் போன்ற சமன்பாடுகளை ஒவ்வொரு துகளுக்கும் எழுதிக் கூட்ட,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_r}\sum_{i=1}^{N}\tfrac{1}{2}m_i\left(\dot{x}_i^2+\dot{y}_i^2+\dot{z}_i^2\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{N}m_i\left(\dot{x}_i\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_r}+\dot{y}_i\frac{\partial \dot{y}_i}{\partial q_r}+\dot{z}_i\frac{\partial \dot{z}_i}{\partial q_r}\right)$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\left(X_i\frac{\partial x_i}{\partial q_r}+Y_i\frac{\partial y_i}{\partial q_r}+Z_i\frac{\partial z_i}{\partial q_r}\right)$$

அதாவது

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}=\frac{\partial T}{\partial q_r}+F_r$$

இங்கு

$$F_r=\sum_{i=1}^{N}\left(X_i\frac{\partial x_i}{\partial q_r}+Y_i\frac{\partial y_i}{\partial q_r}+Z_i\frac{\partial z_i}{\partial q_r}\right)\quad r=1,2,\ldots n \quad (10)$$

$r=1, 2, 3......, n$ என்ற ஒவ்வொரு மதிப்பிற்கும் (9) போன்ற ஒரு சமன்பாடு கிடைக்கும்.

q_r என்னும் பொதுப்படுத்திய கூறில் மட்டும் δq_r என்ற சிறு மாற்றம் செய்க. இதனால் $x_i\, y_i\, z_i$, ல் ஏற்படும் மாற்றங்கள் (1)ன்படி

$$d x_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_r}\delta q_r , \quad i = 1, 2, 3, \qquad N$$

$$d y_i = \frac{\partial y_i}{\partial q_r}\delta q_r \quad i = 1, 2, 3, \qquad N$$

$$d z_i = \frac{\partial z_i}{\partial q_r}\delta q_r \quad i = 1, 2, 3 \qquad N$$

எனவே $(x_i y_i z_i)$ல் தாக்கும் விசையான (X_i , Y_i , Z_i) செய்யும் வேலை அளவு $X_i\, dx_i + Y_i\, dy_i + Z_i\, dz_i$

$$= \left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_r} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_r} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_r} \right) \delta q_r$$

இவ்விதம் ஒவ்வொரு துகளின் மீதான விசைக்கும் வேலையைக் கணக்கிட்டுக் கூட்ட, அவ்வமயம் F_r என்பது எல்லா விசைகளும் செய்யும் மொத்த வேலை என்று தெரியவரும்.

N துகள்களில், சிலவற்றிடையே தாக்கும் விசைகள் இரண்டிரண்டாக வரும்; மேலும் இவை எதிர்த்திசைகளில் தாக்கும். அவற்றின் இடையே உள்ள தூரம் மாருத நிலையில் இவை செய்யும் மொத்த வேலை பூச்சியமாகும். இத்தகைய விசைகளை உள் விசைகள் (internal forces) என்போம். F_rஐக் கணக்கிடுகையில் இவைகளை விட்டுவிடலாம். இத்தகைய வேலை செய்யாத விசைகளைத் தவிர்த்த மற்ற விசைகள் வெளி விசைகள் (external forces) எனப்படும். எனவே $F_r\ \delta q_r$ ஐப் பொதுவாக, δq_r என்ற மாற்றத்திற்கு வெளி விசைகள் செய்யும் வேலை என்றே கொள்ளலாம். பொதுவில் $F_1 , F_2 ,......F_n$ ஒவ்வொன்றும் $q_1 , q_2 , q_3 , ..., q_n$அன்றி t இலும் சார்புகளாக அமையும். F_r ஐப் பொதுப்படுத்திய விசை (generalised force) என்று குறிப்பிடுவோம். வான இயலில் கருதப்படும் விசைகள் பொதுவில் வெளிப்படையாக t ஐச் சார்ந்துள்ளவைகளாக (explicit functions of time) அமைவதில்லை. மேலும் ஒரு சிறு இடமாற்றத்தால் அவை செய்யும் மொத்த வேலை, அம்மாற்றத்தின் முதனிலை, கடை நிலைகளை மட்டும் சார்ந்திருக்குமேயன்றி, மாற்றப் பாதையைப் பொறுத்து மாருதெனில், இத்தகைய விசைகள் காப்புநிலை விசைகள் (conservative forces) எனப்படும். இந்நிலையில் $F_1\, dq_1 + F_2\, dq_2 + ... F_n\, dq_n$ என்பது ஒரு நிறை நுண்ணெண் (perfect differential) ஆகும். இதனால் $V\ (q_1, q_2 .....q_n)$ என்ற ஒரு சார்பினை

$$\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_r} = F_r \quad r=1, 2. 3 \ldots\ldots n \tag{11}$$

என்ற சமன்பாடுகளுக்கிணங்க பெற முடியும். Vஐ துகளின் இந்த நிலையைப் பொறுத்த நிலைப்பண்புச் சக்தி (potential energy) என்று அழைப்போம்.

$F_1, F_2 \ldots\ldots F_n$ ஆகியவை வெளிப்படையாக காலத்தைச் சார்ந்தவையாக அமைந்தபோதிலும்கூட, V என்ற சார்பு (11)ம் சமன்பாட்டுக்கிணங்க பெறப்படலாம் என்பதைக் கவனிக்க.

இப்போது $T-V$ என்ற அமைப்பை L என்று குறிப்பிடுவோம். T ஆனது $q_1, q_2, q_3 \ldots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3 \ldots\ldots, \dot{q}_n$ ஆகியவைகளின் சார்பு, V ஆனது $q_1, q_2, q_3, \ldots\ldots, q_n, t$ ஆகியவைகளின் சார்பு, என்பதால் Lம் $q_1 . q_2, \ldots\ldots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots\ldots \dot{q}_n, t$ ஆகியவைகளின் சார்பாகும். L ஐ **லாகிராஞ்சியன்** (Lagrangian) என்றும் இயக்க நிலைப் பண்பு (kinetic potential) என்றும் குறிப்பிடுவது வழக்கம்.

$$\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_r} = 0, r=1, 2, \ldots\ldots, n$$

என்பதால் (9)ம் சமன்பாட்டை

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_r} (T-V) = \frac{\partial}{\partial q_r} (T-V), r=1, 2, \ldots\ldots, n$$

அதாவது

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial L}{\partial q_r} = 0, r=1, 2, \ldots\ldots, n. \tag{12}$$

என்றெழுதலாம் $q_1, q_2, \ldots . q_n$ என்ற n கூறுகளைத் தீர்க்க இந்த n சமன்பாடுகள் உதவும். ஒவ்வொன்றும் இரண்டாம்படி வகைக் கெழுச் சமன்பாடாக (second order differential equation) இருப்பதைக் கவனிக்க. மேலே விவரித்த முறையில் $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n$ என்பன எடுத்துக்கொள்ளப்பட்ட விதத்தில்

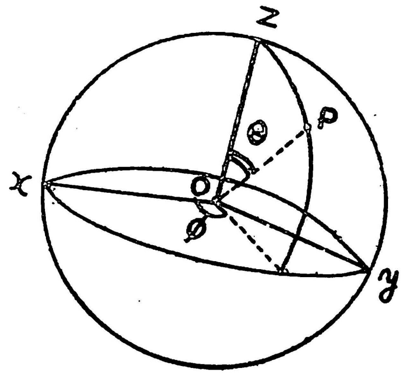
(i) துகள்களின் எந்த ஒரு நிலையையும் (configuration) குறிப்பிடப் போதுமானவை.

(ii) துகள்களின்மீது தாக்கும் உள் விசைகள் வேலை செய்யாத வண்ணம் (கட்டுப்பாடுகளை உடைக்காமல்) $q_1, q_2, \ldots\ldots q_n$ ஆகியவைகளில் ஒன்றுக்கொன்று சாராத மாறுதல்களைச் செய்ய இயலும் என்பதையும் கவனிக்க. இத்தகைய துகள்களின் தொகுப்பை முழுமைத் தொகுப்பு (holonomous system) என்று கூறுவோம். (12)ம் சமன்பாடுகள் **லாகிராஞ்சின் சமன்பாடுகள்** எனப்படும்.

$\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}$ ஐ p_r என்று குறிப்போம். இதனை q_r க்கு இசைவான உந்தம் (momentum conjugate to q_r) என்று கூறுவது வழக்கம்.

எடுத்துகாட்டு 1: நிலையான ஒரு கோளத்தின் மேல் m என்னும் ஒரு துகள் பதிந்து செல்கிறது. அதன் இயக்கச் சமன்பாடுகளைத் தருவி.

z அச்சை நெடுக்குத்தாக எடுத்துக் கொள்க:
துகளின் ஆரைக்கோணக் கூறுகள் (a, θ, ϕ) எனில்



படம் 6·1

$$T = \frac{1}{2}\, m\,(a^2\,\dot{\theta}^2 + a^2 \sin^2\theta\,\dot{\phi}^2)$$

$$V = -mga\cos\theta$$

எனவே

$$L = \frac{1}{2}\, m\,(a^2\,\dot{\theta}^2 + a^2 \sin^2\theta\,\dot{\phi}^2) + mga\cos\theta$$

$$\therefore\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{2}\, ma^2 \cdot 2\dot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \frac{1}{2}\, ma^2 \sin^2\theta \cdot 2\dot{\phi}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{1}{2}\, m \cdot a^2 .\, 2\sin\theta\cos\theta\,\dot{\phi}^2 - mga\sin\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = 0.$$

இயக்கச்சமன்பாடுகள்

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \quad - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$$

என்பவை. அதாவது

$$m a^2 \ddot{\theta} - m a^2 \sin\theta \cos\theta\, \dot{\phi}^2 + mga \sin\theta = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\ (ma^2 \sin^2\theta\, \dot{\phi}) - 0 = 0$$

அதாவது $\sin^2\theta\, \dot{\phi} = c$, ஒரு நிலையான எண்............ (i)

$$\therefore \quad \dot{\phi} = \frac{C}{\sin^2\theta}$$

இதனைப் பிரதியிட,

$$a\ddot{\theta} - \frac{a \cos\theta \cdot c^2}{\sin^3\theta} + g \sin\theta = 0 \qquad \text{(ii)}$$

இதனைத் தீர்த்தால் θ கிடைக்கும். பிறகு $\dot{\phi} = \frac{c}{\sin^2\theta}$ ஐத் தீர்த்து, ϕ ஐப் பெறலாம்.

லாகிராஞ்சின் இயக்கச் சமன்பாடுகள் பகுதிவகைக்கெழு முறையில் தருவிக்கப்பட்டபோதிலும், அவை சாதாரண வகைக் கெழு சமன் பாடுகளேயாகும். (ordinary differential equations) மேற்கண்ட எடுத்துக்காட்டில் இதனை நேரில் சரிபார்க்கலாம்.

6·2 இயக்கசக்தித் தொகை

லாகிராஞ்சியனில் வெளிப்படையாக t இல்லாவிடில்

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{r=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \ddot{q}_r + \frac{\partial L}{\partial q_r} \dot{q}_r \right)$$

$$= \sum_{r=1}^{n} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \ddot{q}_r + \dot{q}_r \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \right) \right\} \quad \text{(இயக்கச் சமன்பாடுகளிலிருந்து)}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\sum_{r=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \dot{q}_r \right)$$

எனவே

$$\frac{d}{dt}\left(\Sigma p_r \dot{q}_r - L\right) = 0$$

இதனுல் $\Sigma p_r \dot{q}_r - L$ ஒரு மாறிலி எண் என்றறிகிறேம். இதனை h என்க.

$$\therefore \Sigma p_r \dot{q}_r - L = h \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

துகள்களிடையே நகரும் தடைகள் (moving constraints) ஏதும் இல்லை எனில் $\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial t}$ ஆகியவை பூச்சியமாகும். இம் மாதிரி நிலைகளில் (2), (3), (4) சமன்பாடுகளிலிருந்து T ஆனது $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots\ldots\ldots, \dot{q}_n$ என்ற மாறிகளில் இரண்டாம் படியில் ஒரு படித்தான கோவை என்பதை அறிகிறேம். மேலும் V யிலும் t வெளிப்படையாக இல்லை எனில் இத்தொகுப்பு ஒரு இயல்புத் தொகுப்பு (natural system) எனப்படும்.

இயல்புத் தொகுப்பில் ஆய்லர் தேற்றப்படி.

$$\sum_{r=1}^{n} \dot{q}_r \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} = 2T$$

$$\begin{aligned}\therefore h &= \Sigma p_r \dot{q}_r - L \\ &= \Sigma \dot{q}_r \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} - L \\ &= 2T - (T - V) \\ &= T + V \qquad (14)\end{aligned}$$

எனவே ஒரு இயல்புத் தொகுப்பில், இயக்கச் சக்தி, நிலைமைச்சக்தி ஆகியவற்றின் மொத்தம் ஒரு மாறிலியாகும்.

T ஆனது ஒருபடித்தான கோவையாக இல்லாவிடில் அதனை $T_0 + T_1 + T_2$ என்று எழுதிக் கொள்ளலாம்; இங்கு T_0 ல் $\dot{q}_1, \dot{q}_2 \ldots\ldots \dot{q}_n$ இல்லாமலும் T_1, T_2 என்பன $\dot{q}_1, \dot{q}_2 \ldots\ldots \dot{q}_n$ ல் முறையே ஒரு படி, இருபடி கொண்ட ஒருபடித்தான கோவைகளெனவும் கொள் வோம். V இலும் t வெளிப்படையாக இருக்குமேயாகில்

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{r=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\ddot{q}_r + \frac{\partial L}{\partial q_r}\dot{q}_r\right) + \frac{\partial L}{\partial t}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\Sigma \dot{q}_r \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\right) + \frac{\partial L}{\partial t}, \quad \text{முன் போலவே.}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\Sigma \dot{q}_r \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\right) + \frac{\partial}{\partial t}(T-V)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\Sigma \dot{q}_r \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\right) - \frac{\partial V}{\partial t}.$$

$$= \frac{d}{dt}\left\{\Sigma \dot{q}_r \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_r} + \Sigma \dot{q}_r \frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_r} + \Sigma \dot{q}_r \frac{\partial T_0}{\partial \dot{q}_r}\right\} - \frac{\partial V}{\partial t}$$

$$= \frac{d}{dt}\left\{2T_2 + T_1\right\} - \frac{\partial V}{\partial t}$$

அதாவது

$$\frac{d}{dt}(T_2+T_1+T_0-V) = \frac{d}{dt}(2T_2+T_1) - \frac{\partial V}{\partial t}.$$

V ல் t வெளிப்படையாக இல்லையெனில் $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$ அப்போது

$$T_2+T_1+T_0-V = 2T_2+T_1-h$$

அதாவது

$$T_2-T_0+V = h,$$

ஒரு மாறிலி என்று கிடைக்கும். ஆனால் V ல் t வெளிப்படையாக இருப்பின் தீர்வை,

$$T_2-T_0+V = \int \frac{\partial V}{\partial t}\, dt + h$$

என்று எழுதலாமாயினும் $\frac{\partial V}{\partial t}$ ல் $q_1, q_2, \ldots\ldots q_n$ அனைத்துக்கும் t ன்

சார்பில் எழுதிய பின்னரே இத்தொகையைக் காண இயலும். ஆயினும் தோராய முறைகளைக் கொண்டு இதனைத் தீர்க்க முடியும். விவரங்களுக்கு பிளம்மர் (......)புத்தகத்தைப் பார்க்க.

6·3

முழுமைத் தொகுப்பு ஒன்றில் லாகிராஞ்சியன் L என்க. $q_1, q_2, \ldots\ldots, q_n$ என்பன பொதுப்படுத்திய கூறுகள். பொதுப்படுத்திய உந்தங்கள்

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \quad r=1, 2, \ldots. n \tag{15}$$

L என்பது $q_1, q_2, \ldots\ldots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2 \ldots\ldots \dot{q}_n, t$ ஆகியவற்றின் சார்பு என்பதால் (15) உள்ள n சமன்பாடுகளைக்கொண்டு, $\dot{q}_1, \dot{q}_2 \ldots\ldots \dot{q}_n$ ஆகியவற்றின் மதிப்பை $q_1, q_2 \ldots\ldots, q_n, p_1, p_2 \ldots\ldots, p_n, t$ ஆகிய வற்றின் சார்பாகக் கண்டுபிடிக்க இயலும். இவற்றைப் பிரதியிட்டு, L ஐ $q_1, q_2 \ldots\ldots q_n, p_1, p_2 \ldots\ldots, p_n, t$ ஆகியவற்றின் சார்பாகவே எழுதலாம். லாகிராஞ்சின் இயக்கச் சமன்பாடு (12) இப்போது

$$\dot{p}_r = \frac{\partial L}{\partial q_r} \quad r=1, 2, 3 \ldots\ldots, n \tag{16}$$

என்று அமையும். இங்கு கவனிக்கவேண்டியது: L ஆனது, q க்கள், $\dot{q}$ க்கள், t ஆகியவற்றில் ஒரு சார்பு,

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \quad r=1, 2 \ldots\ldots, n$$

$$\dot{p}_r = \frac{\partial L}{\partial q_r} \quad r=1, 2 \ldots\ldots, n$$

இப்போது

$$H = \Sigma\, p_r \dot{q}_r - L \tag{17}$$

என்று வரையறுக்கப்பட்ட H என்னும் புதிய சார்பினை எடுத்துக் கொள்வோம். H ஐ qக்கள், $\dot{q}$ க்கள், t ஆகியவற்றின் சார்பாகவோ, அல்லது ($\dot{q}_r$ ஐ q_r க்கள், t இவைகளின் சார்பாக எழுதிய பின்னர்), p க்கள், q க்கள், t ஆகியவற்றின் சார்பாகவோ கருதலாம். $\delta t, \delta q_r, \delta \dot{q}_r, r=1, 2, \ldots\ldots, n$ என்ற ஒன்றுக்கொன்று சாராத சிறு மாற்றங் களை $q_r, \dot{q}_r$ இவைகளுக்களித்தால் H ல் ஏற்படும் மாற்றம்,

$$\delta H = \delta\, (\Sigma\, p_r \dot{q}_r - L)$$

$$= \sum \left(p_r\, \delta\dot{q}_r + q_r\, \delta\dot{p}_r - \frac{\partial L}{\partial q_r}\delta q_r - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\delta\dot{q}_r\right) - \frac{\partial L}{\partial t}\delta t$$

$$= \sum (p_r\, \delta\dot{q}_r + q_r\, \delta\dot{p}_r - \dot{p}_r\, \delta q_r - p_r\, \delta\dot{q}_r) - \frac{\partial L}{\partial t}\delta t$$

$$= \sum (\dot{q}_r\, \delta p_r - \dot{p}_r\, \delta q_r) - \frac{\partial L}{\partial t}\delta t \tag{18}$$

$\delta t, \delta q_r, \delta\dot{q}_r$ ஆகியவை ஒன்றுக்கொன்று சாராத மாற்றங்கள் என்பதால் $\delta t, \delta p_r, \delta q_r$ $r=1, 2, \ldots\ldots, n$ ஆகியவையும் ஒன்றுக் கொன்று சாராத $2n+1$ மாற்றங்கள் ஆகும். H ஐ q க்கள், p க்கள், t ஆகியவற்றின் சார்பாகக் கருதினுல் (18) இலிருந்து நாம் பெறுவது

$$\frac{\partial H}{\partial p_r} = \dot{q}_r \quad \frac{\partial H}{\partial q_r} = -\dot{p}_r \quad r = 1, 2, 3 \ldots\ldots n \tag{19}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \tag{20}$$

(19) ம் சமன்பாடு ஆமில்டனின் நியமனச் சமன்பாடு (canonical) equation) எனப்படும். H என்னும் சார்பு q க்கள், p க்கள், t, ஆகியவற்றைச் சார்ந்ததாகக் கருதப்படும். $q_1, q_2 \ldots\ldots q_n$, $p_1, p_2 \ldots\ldots p_n$, ஆகியவை ஒன்றையொன்று சாராத $2n$ கூறுகளாகக் கொள்ளப்படும். இவ்விதமாக (19) ம் சமன்பாடு, இந்த $2n$ கூறுகளில் முதற்படி வகைக் கெழுச் சமன்பாடாக அமைகிறது. இங்கு முக்கியமாகக் கவனிக்கவேண்டியது $p_1, p_2 \ldots\ldots p_n$ என்பன $q_1, q_2 \ldots\ldots q_n$, $\dot{q}_1, \dot{q}_2 \ldots\ldots \dot{q}_n$ ஆகியவற்றின் சார்புகளாக இல்லாமல் சாராக் கூறுகளாகவே கருதப்படுகின்றன என்பதே.

L ல் t வெளிப்படையாக வாராதிருந்தால்

$$H = \Sigma p_r \dot{q}_r - L$$

என்பதிலும் வெளிப்படையாக t வராது. இதனை (20) இலிருந்து அறியலாம். மேலும் அப்போது

$$\frac{dH}{dt} = \Sigma \frac{\partial H}{\partial q_r} \dot{q}_r + \Sigma \frac{\partial H}{\partial p_r} \dot{p}_r + \frac{\partial H}{\partial t}$$

$= -\Sigma \dot{p}_r \dot{q}_r + \Sigma \dot{q}_r \dot{p}_r + 0$ .... (19) ம் சமன்பாடுகளிலிருந்து

$= 0$

எனவே H ஆனது ஒரு நிலையான கணியம்.

எடுத்துக்காட்டு 2

எடுத்துக்காட்டு (1) ஐ ஆமில்டனில் நியமச் சமன்பாடுகளைக் கொண்டுதீர்.

$q_1 = \theta$, $q_2 = \phi$ என்க.

$$L = \tfrac{1}{2}m\,(a^2 \dot{q}_1^2 + a^2 \sin^2 q_1\, \dot{q}_2^2) + mga \cos q_1$$

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}$$

$$= \tfrac{1}{2}\, m\, a^2, 2\dot{q}_1$$

$$\therefore \dot{q}_1 = \frac{p_1}{ma^2}$$

$$p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}$$

$$= ma^2 \sin^2 q_1 \dot{q}_2$$

$$\dot{q}_2 = \frac{p_2}{ma^2 \sin^2 q_1}$$

$$\therefore \; H = p_1 \dot{q}_1 + p_2 \dot{q}_2 - L$$

$$= \frac{p_1}{ma^2} + \frac{p_2}{ma^2 \sin^2 q} - \frac{1}{2}\left(\frac{a^2 p_1^2}{m^2 a^4} + \frac{a^2 \sin^2 q_1 \, p_2^2}{m^2 a^4 \sin^4 q_1}\right) - mga \cos q_1$$

$$= \frac{p_1^2}{2\,ma^2} + \frac{p_2^2}{2\,ma^2 \sin^2 q_1} - mga \cos q_1$$

நியமச் சமன்பாடுகளாவன

$$\dot{q}_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1}$$

அதாவது

$$\dot{q}_1 = \frac{p_1}{ma^2} \qquad \text{(i)}$$

மேலும்

$$\dot{q}_2 = \frac{\partial H}{\partial p_2}$$

அதாவது

$$\dot{q}_2 = \frac{p_2}{ma^2 \sin^2 q_1} \qquad \text{(ii)}$$

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial q_1}$$

அதாவது

$$\dot{p}_1 = \frac{p_2^2 \cos q_1}{ma^2 \sin^3 q_1} - mga \sin q_1 \qquad \text{(iii)}$$

$$\dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial q_2}$$

அதாவது

$$\dot{p}_2 = 0 \qquad \text{(vi)}$$

(iv) இலிருந்து

$p_2 =$ மாறிலி

$= ma^2 c$ (v)

என்க. (ii) இலிருந்து

$\sin^2 q_1 \cdot \dot{q}_2 = c$

(i), (iii) இலிருந்து

$$ma^2 \ddot{q}_1 = \frac{m^2 a^4 c^2 \cos q_1}{ma^2 \sin^3 q_1} - mga \sin^3 q_1$$

அதாவது

$$a \ddot{q} - \frac{ac^2 \cos q_1}{\sin^3 q_1} + g \sin q_1 = 0 \qquad \text{(vi)}$$

(v), (vi) ஆகியவையே எடுத்துக்காட்டு 1 ல் (i), (ii) ஆகிய சமன்பாடுகள் என்பதைக் கவனிக்க.

ஆமில்டன் சமன்பாடுகளும், லாகிராஞ்சு சமன்பாடுகளும் கடைசியில் ஒரே மாதிரியான வகைக் கெழுச் சமன்பாடுகளையே தருகின்றன என்பதை இந்த எடுத்துக்காட்டின் மூலம் சரி பார்த்தோம். ஆமில்டன் சமன்பாடுகள் இம்மாதிரி கணக்குகளைத் தீர்ப்பதற்காகக் கண்டுபிடிக்கப்பட்டவை அல்ல. இயக்க இயலின் அடிப்படைத் தத்துவங்களை ஆராய்ந்தால்தான் ஆமில்டனின் சமன்பாடுகளின் அருமை தெரியவரும்.

6·4 தொடுகை மாற்றங்கள் (contract transformations)

($q_1, q_2 \ldots\ldots q_n, p_1, p_2 \ldots\ldots p_n$) என்பன $2n$ மாறிகள். ($Q_1, Q_2 \ldots\ldots Q_n, P_1, P_2 \ldots P_n$) என்பன வேறு $2n$ மாறிகள். ஒவ்வொரு Q வும் ஒவ்வொரு Pயும் எல்லா q, p க்களின் சார்புகள் என்க.

$$\left.\begin{aligned} Q_i &= Q_i (q_1, q_2 \ldots\ldots q_n, p_1, p_2 \ldots\ldots p_n) \; i = 1, 2 \ldots\ldots, n. \\ P_i &= P_i (q_1, q_2 \ldots\ldots q_n, p_1, p_2 \ldots\ldots p_n) \; i = 1, 2 \ldots\ldots, n. \end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

இச்சமன்பாடுகள் ($q_1, q_2\, q_3 \ldots\ldots q_n, p_1, p_2, p_3 \ldots\ldots p_n$) என்ற மாறிகளிலிருந்து ($Q_1, Q_2, Q_3 \ldots\ldots Q_n, P_1, P_2, P_3 \ldots\ldots P_n$) மாறிகளுக்கான மாற்றச் சமன்பாடுகள் ஆகும். இவற்றின் மூலம் f ($q_1, q_2 \ldots\ldots q_n, p_1, p_2 \ldots\ldots p_n$) என்ற எந்தக் கோவையையும் F ($Q_1, Q_2, \ldots\ldots Q_n, P_1, P_2 \ldots\ldots P_n$) என்ற புதிய மாறிகளைச் சார்ந்த கோவையாக மாற்றி விடலாம்.

பொதுவில் H ($q_1, q_2, \ldots\ldots {}_nq, p_1, p_2 \ldots\ldots p_n, t$) ஆனது K (${}_1Q, Q_2, \ldots\ldots, Q_n, P_1, P_2, \ldots\ldots P_n, t$) ஆக மாற்றப்படும். ஆமில்டனின்

நியமச் சமன்பாடுகள்

$$\dot{q}_r = \frac{\partial H}{\partial p_r}$$

$$\dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial q_r}$$

என்பன புதிய மாறிகளில் எழுதப்பட்டால் இதே வடிவில் இருக்கத் தேவையில்லை. ஆனால் (21)-ல் உள்ள Q_i, P_i ஆகிய மாறிகளைத் தகுந்தபடி எடுத்துக் கொள்வதனால் புதிய மாறிகளிலும் இயக்கச் சமன்பாடுகள்

$$\dot{Q}_r = \frac{\partial H}{\partial P_r}$$

$$\dot{P}_r = \frac{\partial H}{\partial Q_r}$$

என்ற வடிவில் அமையலாம். இது நிகழ்வதெங்ஙனம் என்று இனி ஆராய்வோம். சமன்பாடு (21)-ன் மூலம் $Q_1, Q_2 \ldots\ldots Q_n, P_1, P_2 \ldots\ldots P_n$ என்பனவற்றை $q_1, q_2 \ldots\ldots q_n, p_1, p_2 \ldots\ldots p_n$-ல் எழுதிய பிறகு

$$p_1dq_1+p_2dq_2+\ldots\ldots+p_ndq_n-(P_1d\dot{Q}_1+P_2dQ_2+\ldots\ldots+P_ndQ_n)$$

என்பது ஒரு நிறை நுண்ணெண் (perfect differential) ஆயின் (21)ஆம் சமன்பாடு ஒரு தொடுகை மாற்றத்தை நிறுவுகின்றது என்போம்.

சில இடங்களில் $Q_1, Q_2 \ldots\ldots Q_n$ என்பன ஒவ்வொன்றும் $q_1, q_2 \ldots\ldots q_n$ என்ற மாறிகளை மட்டுமே சார்ந்திருக்கலாம். இந்நிலையில் இத்தொடுகை மாற்றத்தை விரிவுபடுத்திய புள்ளி மாற்றம் (extended point transformation) என்போம்.

இப்போது $(Q_1, Q_2 \ldots\ldots Q_n, P_1, P_2 \ldots\ldots P_n)$ என்ற மாறிகளை, மற்றொரு தொடுகை மாற்றம் செய்து $(Q_1', Q_2' \ldots\ldots Q_n', P_1', P_2' \ldots\ldots P_n')$ என்ற புதிய மாறிகளைப் பெறுவதாகக் கொள்வோம். $(q_1, q_2 \ldots\ldots q_n, p_1, p_2 \ldots\ldots p_n)$-லிருந்து $(Q_1', Q_2' \ldots\ldots Q_n', P_1', P_2' \ldots P_n')$-க்குச் செய்யப்படும் மாற்றமும் ஒரு தொடுகை மாற்றமே. ஏனெனில்

$$\Sigma p_r\, dq_r - \Sigma P_r\, dQ_r,\ \Sigma P_r\, dQ_r - \Sigma p_r'\, dQ_r'$$

ஆகியவை ஒவ்வொன்றும் ஒரு நிறை நுண்ணெண். ஆகவே,

$$\Sigma P_r\, dq_r - \Sigma p_r'\, dQ_r'$$

என்பதும் ஒரு நிறை நுண்ணெண் ஆகும். எனவே, இரு தொடுகை மாற்றங்களின் பெருக்கற்பலனும் ஒரு தொடுகை மாற்றம்தான்.

$\Sigma p_r\, dq_r - \Sigma P_r\, dQ_r$-ம்

ஒரு நிறை நுண்ணெண் எனில் $\Sigma P_r\, dQ_r - \Sigma p_r\, dq_r$-ம்

ஒரு நிறை நுண்ணெண்தானே. ஆகவே $(Q_1, Q_2 \ldots Q_n, P_1, P_2 \ldots P_n)$-லிருந்து $(q_1, q_2 \ldots q_n, p_1, p_2 \ldots p_n)$-க்குச் செய்யப்படும் மாற்றமும் தொடுகைமாற்றமே. இதனை (21)ஆம் சமன்பாடுகள் நிறுவும் மாற்றத்தின் எதிர் மாற்றம் (Inverse transformation) என்று கூறலாம்.

மாற்றங்களுக்குத் தொடர்புப் பண்பு உண்டு (associative law). மேலும் $Q_i' = q_i \cdot P'_i = p_i$ என்பதும் ஒரு தொடுகை மாற்றமே. (இதுவே ஒருமை மாற்றம் – identity transformation.) எனவே, தொடுகை மாற்றங்கள் ஒரு தொகுதி அமைப்பு (group structure) பெற்றுள்ளன.

எடுத்துக்காட்டு 3

$$Q = \cot^{-1}\left(\frac{p}{kq}\right), \quad P = \frac{1}{2k}(p^2 + k^2 q^2)$$ என்பன, (q, p)-லிருந்து (Q, P)-க்கு ஒரு தொடுகை மாற்றத்தை நிறுவுகின்றன என்று காட்டு.

$$pdq - PdQ = pdq - \frac{1}{2k}(p^2 + k^2q^2)\left(\frac{-1}{1 + \frac{p^2}{k^2 q^2}}\right)\frac{kqdp - kpdq}{k^2 q^2}$$

$$= pdq - \frac{1}{2}(pdq - qdp)$$

$$= d\left(\frac{1}{2}pq\right)$$

$\therefore\ pdq - PdQ$ என்பது ஒரு நிறை நுண்ணெண். எனவே இச் சமன்பாடுகள் ஒரு தொடுகை மாற்றத்தை நிறுவுகின்றன.

(21)ஆம் சமன்பாடுகளிலிருந்து $(P_1, P_2, P_3, \ldots\ldots P_n, p_1, p_2, p_3 \ldots p_n)$ ஆகிய மாறிகளை முடிந்தால் நீக்கி $\Omega\,(Q_1, Q_2, Q_3, \ldots Q_n, q_1, q_2, q_3, \ldots q_n) = 0$ என்ற அமைப்பில் சில சமன்பாடுகளைப் பெற முடியும் என்க. இத்தகைய k சமன்பாடுகள் உள்ளன என்க. இவைகளை

$\Omega_r\ (Q_1, Q_2, Q_3, \ldots\ldots\ldots Q_n, q_1, q_2, q_3, \ldots\ldots\ldots q_n) = 0$, $r = 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots k$ என்று குறிக்க. $(q_1, q_2, q_3, \ldots\ldots q_n, Q_1, Q_2, Q_3, \ldots\ldots Q_n)$ என்ற மாறிகளில் $(dq_1, dq_2, dq_3, \ldots dq_n, dQ_1, dQ_2, dQ_3, \ldots dQ_n)$ என்ற மாற்றங்கள் செய்யப்பட்டால் (22)-லிருந்து

$$\frac{\partial \Omega_r}{\partial Q_1} dQ_1 + \ldots\ldots + \frac{\partial \Omega_r}{\partial Q_n} dQ_n + \frac{\partial \Omega_r}{\partial q_1} dq_1 + \ldots\ldots$$
$$+ \frac{\partial \Omega_r}{\partial Q_n} dq_n = 0 \quad r = 1, 2, 3, \ldots\ldots n \qquad \ldots(23)$$

என்ற k சமன்பாடுகள் சரிசெய்யப்படவேண்டும். மேலும்

$$\Sigma p_r \, dq_r - \Sigma P_r \, dQ_r = dW \qquad \ldots(24)$$

என்றால், $dW = \Sigma \frac{\partial W}{\partial Q_r} dQ_r + \Sigma \frac{\partial W}{\partial q_r} dq_r$ என்பதால்,

$$\left(-\frac{\partial W}{\partial Q_1} - P_1\right) dQ_1 + \ldots\ldots + \left(-\frac{\partial W}{\partial Q_n} - P_n\right) dQ_n$$
$$+ \left(-\frac{\partial W}{\partial q_1} + p_1\right) dq_1 + \ldots\ldots + \left(-\frac{\partial W}{\partial q_n} + p_n\right) dq_n = 0 \quad (25)$$

(23), (25) சமன்பாடுகளிலிருந்து $\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots \lambda_k$ என்ற தேராக் குணகங்களைக் (undetermined coefficients) கொண்டு அடியிற்கண்ட $2n$ சமன்பாடுகளைப் பெறலாம்.

$$\left.\begin{aligned}
-\frac{\partial W}{\partial Q_1} - P_1 + \lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial Q_1} + \lambda_2 \frac{\partial \Omega_2}{\partial Q_1} + \ldots\ldots + \lambda_k \frac{\partial \Omega_k}{\partial Q_1} &= 0 \\
-\frac{\partial W}{} - P_n + \lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial Q_n} + \lambda_2 \frac{\partial \Omega_2}{\partial Q_n} + \ldots\ldots + \lambda_k \frac{\partial \Omega_k}{\partial Q_n} &= 0 \\
-\frac{\partial W}{\partial q_1} - p_1 + \lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial q_1} + \lambda_2 \frac{\partial \Omega_2}{\partial q_1} + \ldots\ldots + \lambda_k \frac{\partial \Omega_k}{\partial q_1} &= 0 \\
-\frac{\partial W}{\partial q_n} - p_n + \lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial q_n} + \lambda_2 \frac{\partial \Omega_2}{\partial q_n} + \ldots\ldots + \lambda_k \frac{\partial \Omega_k}{\partial q_n} &= 0
\end{aligned}\right\} (26)$$

(22), (26) சமன்பாடுகள் மொத்தம் $2n+k$ எண்ணிக்கை கொண்டுள்ளன. இவைகளைக் கொண்டு $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots\ldots, \lambda_k$ ஐ நீக்கிய பிறகு $2n$ சமன்பாடுகள் கிடைக்கும். இவைகள் மூலம் $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots\ldots Q_n, P_1, P_2, P_3 \ldots\ldots P_n$ ஐ $q_1, q_2, q_3, \ldots\ldots q_n, p_1, p_2, p_3 \ldots\ldots p_n$-ன் சார்புகளாக எழுதியுள்ளதாகக் கருதலாம். இதன் மறுதலையும் மெய்யானதே [(பயிற்சி (2) பார்க்க).]

6.5 பாஃப்பு உருவம் (Pfaff's expression)

$X_1, X_2, X_3, \ldots\ldots X_n$ என்பன ஒவ்வொன்றும் $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_n$ என்ற மாறிகளின் சார்புகள் என்க.

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + X_3 dx_3 + \ldots\ldots + X_n dx_n$$

என்பது ஒரு பாஃப்பு உருவம் எனப்படும். இதனை θ_d என்று எழுதுக. $\delta x_1, \delta x_2, \delta x_3, \ldots\ldots\ldots, \delta x_n$ என்பன, $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots\ldots x_n$ இவற்றைச் சாராத வேறொரு சிறு மாற்றம் எனில்,

$$\theta_\delta = X_1\delta x_1 + X_2\delta x_2 + X_3\delta x_3 + \ldots\ldots\ldots + X_n\delta x_n$$

$$\therefore\ \delta\theta_d - d\theta_\delta = \delta\,(\Sigma X_r dx_r) - d\,(\Sigma X_s \delta x_s)$$

$$= \Sigma\,(X_r\,\delta d\,x_r + \delta X_r\,dx_r)$$

$$-\Sigma\,(X_s\,d\delta x_s + dX_s\,\delta x_s)$$

δ, d என்பவை ஒன்றையொன்று சாராத மாற்றங்கள் என்பதால் $\delta dx_i = d\delta x_i$. எனவே

$$\delta\theta_d - d\theta_\delta = \sum_r \delta X_r dx_r - \sum_s d\,X_s\,\delta x_s \qquad \ldots(27)$$

$$= \sum_r \left(\sum_j \frac{\partial X_r}{\partial x_j}\delta x_j\right) dx_r - \sum_s \left(\sum_i \frac{\partial X_s}{\partial x_i} dx_i\right)\delta x_s$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\,dx_i\,\delta x_j$$

இங்கு $a_{ij} = \dfrac{\partial X_i}{\partial x_j} - \dfrac{\partial X_j}{\partial X_i}$

இப்போது $(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots\ldots x_n$ என்ற மாறிகளிலிருந்து ஏதேனும் மாற்றம் செய்து $(y_1, y_2, y_3, \ldots\ldots\ldots y_n)$ என்ற புதிய மாறிகளைப் பெற்றால் $(X_1, X_2, X_3, \ldots\ldots\ldots X_n)$ உம் $(Y_1, Y_2, Y_3 \ldots\ldots\ldots Y_n)$ என்றபடி மாறும்.

அப்போது $X_1dx_1 + X_2dx_2 + X_3dx_3 + \ldots\ldots\ldots + X_ndx_n$ என்ற வடிவம் $Y_1dy_1 + Y_2dy_2 + Y_3dy_3 + \ldots\ldots\ldots + Y_ndy_n$ என்று மாறும்.

$$\frac{\partial Y_i}{\partial y_i} - \frac{\partial Y_j}{\partial y_j} = b_{ij}$$

என்க. $\delta\theta_d - d\theta_\delta$ என்பது எப்போதும் மாறாதாகையால்

$$\Sigma\Sigma a_{ij}\ dx_i\ \ \delta x_j = \Sigma\Sigma b_{ij}\ dy_i\ \ \delta y_j$$

எனவே $\Sigma\Sigma a_{ij}\,dx_i\,\delta x_j$ என்பது வடிவத்தில் நிலைத்திருக்கும் (covariant) என்று அறிகிறோம்.

அடுத்தபடியாக W என்பது $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots\ldots x_n$-ல் ஒரு சார்பு என்க.

$$\left(X_1 + \frac{\partial W}{\partial x_1}\right) dx_1 + \ldots\ldots\ldots + \left(X_n + \frac{\partial W}{\partial x_n}\right) dx_n$$

என்ற உருவத்திற்கு

$$\delta\theta_d - d\theta_\delta = \Sigma\Sigma\, a'_{ij}\, dx_i\, \delta x_j$$

எனில்

$$a'_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(X_i + \frac{\partial W}{\partial x_i}\right) - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(X_j + \frac{\partial W}{\partial x_j}\right)$$

$$= \frac{\partial X_i}{\partial x_j} - \frac{\partial X_j}{\partial x_j}$$

$$= a_{ij}$$

எனவே $\delta\theta_d - d\theta_\delta$ என்பது, ஒரு நிறை நுண்ணெண்ணை பாைப்பு உருவத்துடன் கூட்டுவதால் மாறுவதில்லை என்றறிகிறோம்.

மாற்றமொன்றினைத் தொடுகை மாற்றமா என்று அறிய இப்போது மற்றொரு சோதனையைத் தருவிப்போம். இதற்கு $\Sigma p_r\, dq_r - \Sigma P_r\, dQ_r$ ஒரு நிறை நுண்ணெண்ணாக இருக்க வேண்டுமல்லவா? இது $d\,W$ என்க.

$$\therefore\ \Sigma p_r\, dq_r = \Sigma P_r\, dQ_r + d\,W.$$

எனவே (27)-ன்படி $(q_1, q_2, q_3, \ldots q_n, p_1, p_2, p_3, \ldots p_n)$ இலிருந்து $(Q_1, Q_2, Q_3, \ldots Q_n, P_1, P_2, P_3, \ldots P_n)$-க்குச் செய்யப்படும் மாற்றம் ஒரு தொடுகை மாற்றமாக இருக்க நிபந்தனையாவது.

$$\sum_r (\delta\, p_r\, dq_r - dq_r\, \delta p_r) = \sum_r (\delta\, P_r\, dQ_r\, dP_r - \delta Q_r) \qquad \ldots(28)$$

அதாவது $\Sigma\, (\delta p_r\, dq_r - dq_r\, \delta p_r)$ என்பது ஒரு நிலையான எண்.

6.6 லாகிராஞ்சு அடைப்பு (Lagrange brackets)

$(q_1, q_2, q_3, \ldots q_n, p_1, p_2, p_3, \ldots p_n)$ என்பன ஒவ்வொன்றும் பல மாறிகளின் சார்புகளாக இருக்கலாம். அவற்றில் u, v என்பன இரு மாறிகள் எனில்

$$\left(\frac{\partial q_1}{\partial u}\frac{\partial p_1}{\partial v} - \frac{\partial p_1}{\partial u}\frac{\partial q_1}{\partial v}\right) + \left(\frac{\partial q_2}{\partial u}\frac{\partial p_2}{\partial v} - \frac{\partial p_2}{\partial u}\frac{\partial q_2}{\partial v}\right) + \ldots\ldots + \left(\frac{\partial q_n}{\partial u}\frac{\partial p_n}{\partial v} - \frac{\partial p_n}{\partial u}\frac{\partial q_n}{\partial v}\right)$$

எனும் கோவை ஒரு லாகிராஞ்சு அடைப்புருவம் எனப்படும். இதனை $[u, v]$ என்று எழுதுவது வழக்கம்.

$$[u, v] = \sum_r \frac{\partial\,(q_r, p_r)}{\partial\,(u, v)} = -[\,v, u]$$

என்றறிக.

$(q_1, q_2, q_3, \ldots\ldots q_n, p_1, p_2, p_3, \ldots\ldots p_n)$ இலிருந்து $(Q_1, Q_2, Q_3, \ldots\ldots Q_n, P_1, P_2, P_3, \ldots\ldots P_n)$-க்கு ஒரு தொடுகை மாற்றம் செய்தால் ஒவ்வொரு q, p ஐயும் எல்லா Q, P-க்களின் சார்புகளாகக் கருதலாம். இப்போது

$$\sum_r dp_r\, \delta q_r - dq_r\, \delta p_r$$

$$= \sum_r \Bigg[\left(\frac{\partial p_r}{\partial Q_1} dQ_1 + \ldots + \frac{\partial p_r}{\partial Q_n} dQ_n + \frac{\partial p_r}{\partial P_1} dp_1 + \ldots + \frac{\partial p_r}{\partial P_n} d P_n \right)$$

$$\times \left(\frac{\partial q_r}{\partial Q_1} \delta Q_1 + \ldots + \frac{\partial q_r}{\partial P_n} \delta P_n \right)$$

$$- \left(\frac{\partial q_r}{\partial Q_1} dQ_1 + \frac{\partial q_r}{\partial Q_2} dQ_2 + \ldots\ldots + \frac{\partial q_r}{\partial P_n} d P_n \right)$$

$$\times \left(\frac{\partial p_r}{\partial Q_1} \delta Q_1 + \ldots\ldots + \frac{\partial p_r}{\partial P_n} \delta P_n \right) \Bigg].$$

(28)ஆம் சமன்பாட்டின்படி இது $\Sigma\, (\delta P_r\, dQ_r - dP_r\, \delta Q_r)$-க்குச் சமம். மேலும் δ , d என்பன ஒன்றையொன்று சாராத மாற்றங்கள். ஆகவே இவற்றிலிருந்து நாம் பெறுபவை :

$$\left.\begin{array}{ll} [P_i , P_j] = 0 , \; [Q_i , Q_j] = 0 & i = 1, 2, 3, \ldots\ldots , n \\ & j = 1, 2, 3, \ldots\ldots , n \\ [Q_i , P_j] = 0 & i = 1, 2, 3, \ldots\ldots , n \\ & j = 1, 2, 3, \ldots\ldots , n \\ & \quad i \neq j \\ [Q_i , P_i] = 1 & \end{array}\right\} \quad (29)$$

(29)ஆம் சமன்பாடுகளையே தொடுகை மாற்றத்திற்கான நிபந்தனைகளாகக் கொள்ளலாம்.

6·7 பாய்சான் அடைப்புகள் (Poisson Brackets)

u, v என்பன $q_1, q_2, q_3, \ldots\ldots q_n, p_1, p_2, p_3 \ldots\ldots p_n$ என்ற மாறிகளில் இரு சார்புகள் என்க.

$$\left(\frac{\partial u}{\partial q_1} \frac{\partial v}{\partial p_1} - \frac{\partial u}{\partial p_1} \frac{\partial v}{\partial q_1} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial q_2} \frac{\partial v}{\partial p_2} - \frac{\partial u}{\partial p_2} \frac{\partial v}{\partial q_2} \right) + \ldots$$

$$+ \left(\frac{\partial u}{\partial q_n} \frac{\partial v}{\partial p_n} - \frac{\partial u}{\partial p_n} \frac{\partial v}{\partial q_n} \right)$$

என்ற கோவை பாய்சான் அடைப்புருவம் எனப்படும். இதனை $\{u , v\}$ என்று எழுதுவது வழக்கம்.

$$\{u, v\} = \sum_r \frac{\partial (u, v)}{\partial (q_r, p_r)} = -\{v, u\}$$

என்பதைக் கவனிக்க.

லாகிராஞ்சு அடைப்புகளுக்கும் பாய்சான் அடைப்புகளுக்கும் நெருங்கிய தொடர்பு உண்டு. அவையாவன:

$$\left.\begin{array}{ll} \sum_{r=1}^{2n} \{u_r, u_i\} [u_r, u_j] = 0 & i \neq j \text{ எனில்} \\ \sum_{r=1}^{2n} \{u_r, u_i\} [u_r, u_i] = 1 & \end{array}\right\} \quad \ldots(30)$$

இங்கு $u_1, u_2, u_3, \ldots\ldots, u_{2n}$ என்பன $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots\ldots Q_n, P_1, P_2, P_3, \ldots\ldots P_n$ என்பனவற்றைக் குறிப்பதாகக் கொள்ளலாம்.

(30)ஆம் சமன்பாடுகளைப் பயன்படுத்தினால் (29)ஆம் சமன்பாடுகளை

$$\left.\begin{array}{lll} \{Q_i, Q_j\} = 0 & i = 1, 2, \ldots, n \\ & j = 1, 2, \ldots, n \\ \{P_i, P_j\} = 0 & \quad ,, \\ \{P_i, Q_j\} = 0 & i = 1, 2, \ldots, n \\ & j = 1, 2, \ldots, n, \\ & i \neq j \\ \{Q_i, P_i\} = 1 & i = 1, 2, \ldots, n \end{array}\right\} \quad \ldots(31)$$

என்று எழுதலாம். இவையே தொடுகை மாற்றத்திற்குப் பாய்சான் அடைப்புகளைக் கொண்டு எழுதப்பட்ட நிபந்தனைகளாகும்.

6·8

$X_1, X_2, X_3 \ldots\ldots X_{2n+1}$ என்பன ஒவ்வொன்றும், $x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots \ldots\ldots x_{2n+1}$ என்ற $2n+1$ மாறிகளில் சார்புகள் என்க.

$$X_1\, dx_1 + X_2\, dx_2 + X_3\, dx_3 + \ldots\ldots + X_{2n+1}\, dx_{2n+1}$$

உடன் ஒட்டிய நிலைத்த உருவம்

$$\Sigma\Sigma\, a_{ij}\, dx_i\, \delta x_j$$

என்க. இங்கு

$$a_{ij} = \frac{\partial X_i}{\partial x_j} - \frac{\partial X_j}{\partial x_i} = -a_{ji}$$

இதில் $\delta x_1, \delta x_2, \delta x_3 \ldots\ldots \delta x_{2n+1}$ ஆகியவற்றின் குணகங்களைப் பூச்சிய மாக்கினால் நாம் பெறுபவை

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}dx_1 + a_{21}dx_2 + a_{31}dx_3 + \ldots + a_{2n+1,1}\, dx_{2n+1} = 0 \\ a_{12}dx_1 + a_{22}dx_2 + a_{32}dx_3 + \ldots + a_{2n+1,2}\, dx_{2n+1} = 0 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{1,2n+1}dx_1 + a_{2,2n+1}dx_2 + a_{3,2n+1}dx_3 + \ldots + a_{2n+1,2n+1}dx_{2n+1} = 0 \end{array}\right\} (32)$$

இச் சமன்பாடுகள் ஒன்றுக்கொன்று முரண்பாடுள்ளவையல்ல. ஏனெனில் இவற்றின் குணகங்களான அணிக்கோவை (a_{ij}) ஓர் எதிர்ச் சீரணியாகும். மேலும் இதன் வரிசையெண் ஒற்றை (*odd*) ஆதலால் இக் கோவை பூச்சியமாகிறது. மேலும் ஒரு நிலைத்த உருவத்தின் குணகங்களைப் பூச்சியமாக்கிப் பெறப்பட்டவை யாதலால் இச் சமன்பாடுகளும் நிலைத்தவையாகும். அதாவது $x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots x_{2n+1}$ என்பன $y_1, y_2, y_3 \ldots\ldots y_{2n+1}$ என்றபடி மாற்றப்பட்டு நிலைத்த உருவம் $\Sigma\Sigma\, b_{ij}\, dy_i\, \delta y_j$ என்றாகி, δy_j-ன் குணகங்களைப் பூச்சியமாக்கினால் கிடைக்கும் சமன்பாடுகளான

$$\sum_i b_{ij}\, dy_i = 0 \quad j = 1, 2, 3, 4 \ldots\ldots, 2n+1 \qquad \ldots(33)$$

ஆகியவை (32)ஆம் சமன்பாடுகளுக்குச் சமான சமன்பாடுகளாகும்.

இப்போது $\sum_{r=1}^{n} p_r\, dq_r - H dt$ என்ற உருவத்தை எடுத்துக் கொள்வோம். இங்கு H என்பது $q_1, q_2, q_3, \ldots\ldots q_n, p_1, p_2, p_3 \ldots\ldots p_n, t$ என்ற $(2n+1)$ மாறிகளில் ஒரு சார்பு. இங்கு (32)ஆம் சமன்பாடுகள் பெறும் வடிவமாவது,

$$\begin{array}{l} dp_1 + \dfrac{\partial H}{\partial q_1}\, dt = 0 \\ dp_2 + \dfrac{\partial H}{\partial q_2}\, dt = 0 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ dp_n + \dfrac{\partial H}{\partial q_n}\, dt = 0 \\ -\, dq_1 + \dfrac{\partial H}{\partial p_1}\, dt = 0 \\ -\, dq_2 + \dfrac{\partial H}{\partial p_2}\, dt = 0 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \end{array}$$

$$- dq_n + \frac{\partial H}{\partial p_n} dt = 0$$

$$- \frac{\partial H}{\partial q_1} dq_1 - \frac{\partial H}{\partial q_2} dq_2 - \frac{\partial H}{\partial q_3} dq_3 - \ldots\ldots - \frac{\partial H}{\partial q_n} dq_n$$

$$- \frac{\partial H}{\partial p_1} dp_1 - \frac{\partial H}{\partial p_2} dp_2 - \frac{\partial H}{\partial p_3} dp_3 - \ldots\ldots - \frac{\partial H}{\partial p_n} dp_n = 0$$

இவற்றில் கடைசிச் சமன்பாடு மற்றச் சமன்பாடுகளிலிருந்து எளிதில் பெறப்படும். எனவே மிகுந்துள்ள இச் சமன்பாடுகளை

$$\frac{dq_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \quad \frac{dp_r}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial q_r} \qquad r = 1, 2, 3\ldots\ldots n \qquad (34)$$

என்றெழுதலாம். ஆனால் Hஐ ஆமில்டோனியனாகக் கொண்டுள்ள தொகுப்புக்கு இவையே இயக்கச் சமன்பாடுகள். எனவே, H ஆனது $\Sigma p_r dq_r - H\, dt$ உடன் மாருது (invariant) ஒட்டியுள்ளது என்றறிகிறோம்.

இப்போது சமன்பாடுகள் (22), (26) ஆல் தீர்மானிக்கப்படும் ஒரு தொடுகை மாற்றத்தினை எடுத்துக்கொள்வோம். (26)ஆம் சமன்பாடுகளை முறையே $dQ_1, dQ_2, dQ_3\ldots\ldots dQ_n, dq_1, dq_2, dq_3\ldots$ $\ldots dq_n$ ஆல் பெருக்கிக் கூட்ட

$$\sum_{r=1}^{n} \left(p_r\, dq_r - P_r\, dQ_r \right)$$

$$= \sum_{r=1}^{n} \left(\frac{\partial W}{\partial q_r} dq_r + \frac{\partial W}{\partial Q_r} dQ_r \right)$$

$$- \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \sum \left(\frac{\partial \Omega_i}{\partial q_r} dq_r + \frac{\partial \Omega_i}{\partial Q_r} dQ_r \right)$$

$$\therefore\ \Sigma \left(p_r\, dq_r - P_r\, dq_r \right) = dW - \frac{\partial W}{\partial t} dt + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \frac{\partial \Omega_i}{\partial t} dt$$

$$\therefore \Sigma\, p_r\, dq_r - H\, dt = \Sigma\, P_r\, dQ_r - \left(H + \frac{\partial W}{\partial t} - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \frac{\partial \Omega_i}{\partial t} \right) dt - dW$$

ஆனுல் $\Sigma\, p_r\, dq_r - Hdt$ என்ற வடிவம் மாருதது என்பதால், புதிய மாறிகளில் ஆமில்டோனியன் K எனில்

$$K = H + \frac{\partial W}{\partial t} - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \frac{\partial \Omega_i}{\partial t}$$

(இங்கு dW என்பது நிறை நுண்ணெண் என்பதனுல் அதனை விட்டுவிடலாம்) இவ்விதமாக நாம் பின்வரும் தேற்றத்தைப் பெறுகிறோம்.

$(q, q_2, q_3 \ldots q_n\,,\; p_1, p_2, p_3 \ldots . p_n)$ என்ற மாறிகளை $(Q_1, Q_2, Q_3 \ldots\ldots Q_n\,, P_1, P_2\,, P_3 \ldots P_n)$ என்ற மாறிகளாக ஒரு தொடுகை மாற்றத்தின் மூலம் மாற்றுக. இந்நிலையில் ஆமில்டோனியன் H ஆனது புதிய மாறிகளில் K என்று மாறும். மேலும்,

$$\Sigma\,(p_r\, d\, q_r - P_r\, d\, Q_r) = d\, W$$

எனில்

$$K = H + \frac{\partial W}{\partial t} - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \frac{\partial \Omega_i}{\partial t} \qquad \ldots (35)$$

இயக்கச் சமன்பாடுகள் புதிய மாறிகளில்

$$\dot{Q}_r = \frac{\partial K}{\partial P_r}, \qquad r = 1, 2, 3 \ldots\ldots n$$

$$\dot{P}_r = -\frac{\partial K}{\partial Q_r} \qquad r = 1, 2, 3 \ldots\ldots n$$

இங்கு Kஐ முதலில் $Q_1, Q_2, Q_3 \ldots . Q_n\,,\; P_1, P_2\,,\; P_3 \ldots . P_n$ என்ற மாறிகளில் எழுதிக்கொள்ள வேண்டும்.

வானியலில் நாம் கருதும் மாற்றங்களில் Ω_i அனைத்தும் பூச்சிய மாகும்.

6·9 நுண் தொடுகை மாற்றங்கள் (Infinitesimal contact transformation)

தொடுகை மாற்றமொன்று q, p-க்களைச் சிறிதே மாற்றி Q, P ஆக்குவதாகக் கொள்க.

$$Q_r = q_r + \epsilon \phi_r \qquad r = 1, 2, 3 \ldots . n$$

$$P_r = P_r + \epsilon \Psi_r \qquad r = 1, 2, 3 \ldots . n$$

என்க. இங்கு ϵ என்பது ஒரு நுண்ணெண் ; ஒவ்வொரு ϕ_r, Ψ-ம், $q_1, q_2, q_3 \ldots . q_n\,, p_1, p_2\,, p_3 \ldots . p_n$-ல் சார்புகள். இது தொடுகை மாற்றமாக அமையப் போதிய நிபந்தனை

$$\Sigma p_r\, dq_r - \Sigma P_r\, dQ_r = dw$$

அல்லவா ? இதன்படி

$$\Sigma\, [p_r\, dq_r - (p_r + \epsilon \Psi_r)\, (dq_r + \epsilon\, d\, \phi_r)] = dW$$

அதாவது முதல்படி நுண்ணெண்களுக்குச் சரியாக

$$\Sigma\, \epsilon\, [p_r\, d\, \phi_r + \Psi_r\, dq_r] = -dW$$

இதிலிருந்து dW-க்கு ϵ ஒரு காரணி என்பது தெரிய வருகிறது.

$$dW = \epsilon\, d\, U$$

என்க. U என்பதும் q_1 , q_2 , q_3, ... q_n , p_1 , p_2 , p_3, . . . p_n-ல் ஒரு சார்பு. இதனால்

$$\Sigma\, (p_r\, d\, \phi_r + \Psi_r\, dq_r) = -dU$$

அதாவது

$$\Sigma\, (p_r\, d\phi_r + \Psi_r\, dq_r + \phi_r\, dp_r) = -dU + \Sigma\, \phi_r\, dp_r$$

அல்லது

$$\Sigma(\Psi_r\, dq_r - \phi_r\, dp_r = -d\, (U + \Sigma p_r \phi_r) = -d\, K$$

என்க. இங்கு $K = U + \Sigma\, p_r\, \phi_r$. எனவே

$$\phi_r = \frac{\partial K}{\partial p_r},$$

$$\Psi_r = -\frac{\partial K}{\partial q_r} \qquad r = 1, 2, 3 \ldots . n \qquad \ldots(37)$$

என்றறிகிறோம். எனவே (36)ஆம் சமன்பாடுகள் ஒரு தொடுகை மாற்றமாக அமைய வேண்டுமாயின் ϕ_r , Ψ_r என்பன தகுந்த ஒரு சார்பு K இலிருந்து (37)ஆம் சமன்பாடுகளின்படி பெறப்பட வேண்டும்.

சிறப்பாக $\epsilon = \delta\, t$ என்று கொள்க. K ஐ H ஆகவே கொள்க. இப்போது,

$$\phi_r = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \dot{q}_r$$

$$\Psi r = -\frac{\partial H}{\partial q_r} = \dot{p}_r$$

இதனால் (36)ஆம் சமன்பாடுகள்

$$Q_r = q_r + \delta t\, \dot{q}_r \qquad r = 1, 2, 3 \ldots\ldots n$$

$$P_r = p_r + \delta t\, \dot{p}_r \qquad r = 1, 2, 3 \ldots\ldots n$$

என்று மாறுகின்றன ; அதாவது q_1, q_2, q_3, ... q_n, p_1, p_2, p_3 ...... p_n என்பன இந்த மாற்றத்தினால் δt நேரத்திற்குப் பிறகு அவற்றின்

மதிப்புகள் எவையோ அவையாக மாற்றப்படுகின்றன. எனவே நாமறிவதாவது :

H என்னும் ஆமில்டோனியனைக் கொண்ட தொகுப்பு t நேரத்தில் q_1, q_2, q_3 ...... q_n, p_1, p_2, p_3 ...... p_n என்ற இருப்பிடத்திலிருந்து $t+\delta t$ நேரத்தில் Q_1, Q_2, Q_3 ...... Q_n, P_1, P_2, P_3 ...... P_n என்ற இருப்பிடத்திற்குச் செல்கிறது எனில், q_r, p_r இவைகளை Q_r, P_r களாக மாற்றும் சமன்பாடுகள் தொடுகைமாற்றச் சமன்பாடுகளே யாகும்.

நுண்ணிய கால அளவில் கூறுகளில் ஏற்படும் மாற்றம் ஒரு தொடுகைமாற்றம் எனக் கண்டோம். எந்த ஒரு நிலையான (finite) கால அளவில் ஏற்படும் மாற்றமும் அதன் நுண்ணிய கால இடை வெளிகளாகப் பிரித்து, படிப்படியாக ஒவ்வொரு நுண்ணிய கால இடைவெளியிலும் ஏற்படும் மாற்றங்களின் மொத்த விளைவு என்று கருதப்படலாம் அல்லவா? தொடுகைமாற்றங்கள் ஒரு தொகுதி (group) என்பதால் இப்படி ஏற்படும் நிலையான மாற்றமும் ஒரு தொடுகை மாற்றமேயாகும்.

6·10 ஆமில்டன்-ஜாகோபி சமன்பாடு (Hamilton-Jacobi Equation)

தொடுகை மாற்றத்தினால் ஆமில்டோனியன் எவ்விதம் மாறுகின்றது என்பதைப் பத்தி 6·8-ல் பார்த்தோம். (35)ஆம் சமன்பாடுகள் இங்குக் கவனிக்கவேண்டியவை. இப்போது தொடுகை மாற்றத்தை எப்படி எடுத்துக்கொண்டால் புதிய மாறிகள் Q_1, Q_2, Q_3 ...... Q_n, P_1, P_2, P_3......P_n என்பன மாறிலிகளாக அமையும் என்று ஆராய்வோம். Q_1, Q_2, Q_3,...... Q_n, P_1, P_2, P_3,...... P_n ஒவ்வொன்றும் மாறிலி எனில் $\dot{Q}_r = 0, \dot{P}_r = 0$. இதற்கு $K = 0$ என்று எடுத்துக்கொள்வது பொருந்தும். ஏனெனில் அப்போது

$$0 = \frac{\partial K}{\partial P_r} = \dot{Q}_r \qquad r=1, 2, 3 \ldots\ldots n$$

$$0 = \frac{\partial K}{\partial Q_r} = -\dot{P}_r \qquad r=1, 2, 3 \ldots\ldots n$$

$K = 0$ எனில்

$$H + \frac{\partial W}{\partial t} = 0$$ (Ω_1, Ω_2, Ω_3 ...... Ωk அனைத்தும் பூச்சியம் என்று கொள்க).

அதாவது

$$H(q_1, q_2, q_3 \ldots\ldots q_n, p_1, p_2, p_3 \ldots\ldots p_n, t) + \frac{\partial W}{\partial t} = 0 \qquad \ldots(38)$$

W ஆனது $q_1, q_2, q_3 \ldots\ldots q_n, Q_1, Q_2, Q_3 \ldots\ldots Q_n, t$-ல் சார்பு. மேலும் (26)ஆம் சமன்பாடுகளின்படி

$$p_r = \frac{\partial W}{\partial q_r} \qquad r = 1, 2, 3 \ldots\ldots n$$

எனவே (38) ஐ

$$H\left(q_1, q_2, q_3 \cdots q_n, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \frac{\partial W}{\partial q_2} \cdots \cdot \frac{\partial W}{\partial q_n}, t\right) + \frac{\partial W}{\partial t} = 0 \qquad \ldots(39)$$

என்று கொள்ளலாம். H-ன் வடிவம் தெரியுமாதலால் இது W-ல் பகுதி வகைக் கெழுச் சார்பு ஆகும். இதனை ஆமில்டன்-ஜாகோபி சமன்பாடு என்பர்.

(39)ஆம் சமன்பாட்டைத் தீர்த்து Wஎன்ற சார்பினை $q_1, q_2, q_3 \cdots q_n, t$ என்ற மாறிகளின் சார்புகளாகவும் $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_n$ என்ற n மாறிலிகளைக் கொண்டதாகவும் கண்டுபிடித்தால் $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots\ldots \alpha_n$ ஐ $Q_1, Q_2, Q_3 \ldots\ldots Q_n$ என்று கருதலாம். மேலும் $P_1, P_2, P_3 \ldots\ldots P_n$ என்பன $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \ldots\ldots \beta_n$ என்ற மாறிலிகள் எனில், (26)ஆம் சமன்பாடுகளின்படி

$$\left.\begin{aligned} \beta_r &= -\frac{\partial W}{\partial \alpha_r} \qquad r = 1, 2, 3 \ldots\ldots n \\ p_r &= \frac{\partial W}{\partial q_r} \qquad r = 1, 2, 3 \ldots\ldots n \end{aligned}\right\} \qquad \ldots(40)$$

W ஆனது $q_1, q_2, q_3 \ldots\ldots q_n, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots\ldots \alpha_n, t$ ஆகியவற்றின் சார்பு என்பதால் இந்த $2n$ சமன்பாடுகளிலிருந்து $q_1, q_2, q_3 \ldots\ldots q_n, p_1, p_2, p_3 \ldots\ldots p_n$ என்பன t ஐயும் $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots\ldots \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \beta_3 \ldots\ldots \beta_n$ என்ற நியமன மாறிலிகளையும் (canonical constants) சார்ந்தவையாகப் பெறப்படுகின்றன.

எடுத்துக்காட்டு 4

பூமியின் மேற்பரப்பில் தானாக விழும் ஒரு துகளின் இயக்கத்தை வருணிக்க.

m என்பது துகளின் திணிவு என்க. t நேரத்தில் அது ஆதிப் புள்ளியிலிருந்து q தூரத்தில் இருக்கிறது எனில்

$$\begin{aligned} T &= \tfrac{1}{2} m\dot{q}^2 \\ V &= -mgq \\ L &= T - V \\ &= \tfrac{1}{2} m\dot{q}^2 + mgq \end{aligned}$$

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}$$

$$\therefore\ H = p\dot{q} - L$$

$$= \frac{p^2}{m} - \frac{1}{2} m \frac{p^2}{m} - mgq$$

$$= \frac{p^2}{2m} - mgq$$

ஆமில்டன்-ஜாகோபி சமன்பாடு

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2 - mgq + \frac{\partial W}{\partial t} = 0$$

$W = A + B$, A என்பது q-ல் மட்டும், B என்பது T-ல் மட்டும் ஆன சார்பு என்க. இதனை ஆமில்டன்-ஜாகோபி சமன்பாட்டில் பிரதியிட

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{dA}{dq}\right)^2 - mgq = -\frac{dB}{dt}$$

இச் சமன்பாட்டின் இடதுபுறம் q-ல் மட்டும் சார்பு. வலப்பக்கம் t-ல் மட்டும் சார்பு. இவ்விரண்டும் சமமாக இருக்கவேண்டுமானால் ஒவ்வொன்றும் ஒரு நிலையான எண்ணாக இருக்கவேண்டும்.

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{dA}{dq}\right)^2 - mgq = mg\alpha$$

$$= -\frac{dB}{dt}$$

என்க. அப்போது

$$\left(\frac{dA}{dq}\right)^2 = 2m^2 g\,(q+\alpha)$$

$$\therefore\ \frac{dA}{dq} = m\sqrt{2g}\,(q+\alpha)^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore\ A = \frac{2m}{3}\sqrt{2g}\,(q+\alpha)^{\frac{3}{2}}$$

$$\frac{dB}{dt} = -mg\alpha$$

$$\therefore\ B = -mg\alpha t$$

$$\therefore\ W = \tfrac{2}{3} m\sqrt{2g}\,(q+\alpha)^{\frac{3}{2}} - mg\alpha t$$

எனவே p, q என்பன.

$$\beta=-\frac{\partial W}{\partial \alpha}$$

$$=-m\sqrt{2g}\ (q+\alpha)^{\frac{1}{2}}+mgt$$

$$\therefore\ (\beta-mgt)^2=m^2\ (2g)\ (q+\alpha)$$

$$\therefore\ q=-\alpha+\frac{1}{2\,m^2g}\,(\beta^2-2\beta\, mgt+m^2g^2t^2)$$

$$=-\alpha+\frac{\beta^2}{2m^2g}-\frac{\beta}{m}t+\tfrac{1}{2}gt^2$$

$$p=\frac{\partial W}{\partial q}$$

$$=\sqrt{2m^2g}\ (q+\alpha)^{\frac{1}{2}}$$

$$=m\sqrt{2g}\left\{\frac{\beta^2}{2m^2g}-\frac{\beta t}{m}+\tfrac{1}{2}gt^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$\frac{\beta}{m}=-u$ என்று கொண்டால்

$$q=q_0+ut+\tfrac{1}{2}gt^2$$

இங்கு $\frac{\beta^2}{2m^2g}-\alpha=q_0$

$$p=m\sqrt{u^2+2g\,(ut+\tfrac{1}{2}gt^2)}$$

இவையே நாம் நன்கறிந்த $s=s_0+ut+\frac{1}{2}gt^2$, $v^2=u^2+2g\,(s-s_0)$ என்ற சமன்பாடுகளுக்குச் சமமானவைகளாகும்.

இந்த எடுத்துக்காட்டில் H-ல் t என்ற மாறி வெளிப்படையாக வரவில்லை. இம்மாதிரி நிலைகளில்

$$W=W'\,(q_1, q_2, q_3\ldots\ldots q_n)-\alpha_1 t$$

என்று கொள்ளலாம். அப்போது

$$\frac{\partial W}{\partial t}=-\alpha_1$$

$$\frac{\partial W}{\partial q_r}=\frac{\partial W'}{\partial q_r}\qquad r=1, 2, 3, \ldots\ldots n$$

என்பதால் ஆமில்டன்-ஜாகோபி சமன்பாடு

$$H\left(q_1, q_2, q_3\ldots\ldots q_n, \frac{\partial W'}{\partial q_1}, \frac{\partial W'}{\partial q_2}, \frac{\partial W'}{\partial q_3}\ldots\ldots, \frac{\partial W'}{\partial q_n}\right)=\alpha_1$$

என்றாகும். இதற்கு முழுமைத் தீர்வு (complete integral) W' ஐ, α_1 உடன் மற்றும் α_2, α_3, $\alpha_4\ldots\ldots\alpha_n$ என்ற $(n-1)$ சாராமாறிகளையும்

கொண்டும், $q_1, q_2, q_3 \ldots\ldots q_n$ ஆகியவற்றின் சார்பாகவும், பெற வேண்டும். பிறகு தீர்வுகள் (40)-ல் உள்ளது போலவே

$$\left.\begin{aligned} -\beta_1 &= \frac{\partial W'}{\partial \alpha_1} - t \\ -\beta_r &= \frac{\partial W'}{\partial \alpha_r} \qquad r = 2, 3, 4, \ldots\ldots n \\ p_r &= \frac{\partial W'}{\partial q_r}, \qquad r = 1, 2, 3, \ldots\ldots n \end{aligned}\right\} \qquad \ldots(41)$$

என்று அமையும். மேற்கூறிய எடுத்துக்காட்டில் தீர்வுகள் இவ்விதமே அமைந்துள்ளது கவனிக்கத் தக்கது.

6·11

$(q_1, q_2, q_3 \ldots\ldots q_n, p_1, p_2, p_3 \ldots\ldots p_n)$ என்ற மாறிகளில் H என்பது ஓர் ஆமில்டோனியன் என்க. இயக்கச் சமன்பாடுகள் அப்போது

$$\dot{q}_r = \frac{\partial H}{\partial p_r}$$

$$\dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial q_r}$$

என்றிருக்கும். $H = H_0 + H_1$ என்க. முதலில் H_0-க்கு இசைந்த W ஐ

$$H_0\left(q_1, q_2, q_3 \ldots\ldots q_n, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \frac{\partial W}{\partial q_2}, \frac{\partial W}{\partial q_3} \ldots\ldots \frac{\partial W}{\partial q_n}\right) + \frac{\partial W}{\partial t} = 0$$

என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்த்துப் பெறுக. இதனால் கிடைக்கும் W ஆனது $q_1, q_2, q_3 \ldots\ldots q_n, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots\ldots \alpha_n, t$ ஆகியவற்றைச் சார்ந்திருக்கும். இங்கு $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\ldots \alpha_n$, என்பன சாராமாறிகள். $q_1, q_2, q_3 \ldots\ldots q_n, p_1, p_2, p_3 \ldots\ldots p_n$ இலிருந்து $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \ldots\ldots \beta_n, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots\ldots \alpha_n$ என்ற புதிய மாறிகளை

$$\beta_r = -\frac{\partial W}{\partial \alpha_r}$$

$$p_r = \frac{\partial W}{\partial q_r}$$

என்ற சமன்பாடுகள் மூலம் பெறலாம்.

இதனால் H ஆனது

$$K = H + \frac{\partial W}{\partial t}$$

என்று மாறுகிறது. புதிய மாறிகளில் இயக்கச் சமன்பாடுகள்

$$\dot{\alpha}_r = \frac{\partial K}{\partial \beta_r} \quad r = 1, 2, 3 \ldots\ldots n$$

$$\dot{\beta}_r = \frac{-\partial K}{\partial \alpha_r} \quad r = 1, 2, 3 \ldots\ldots n$$

ஆகும். இப்போது

$$H = H_0 + H_1$$

மேலும்

$$H_0 + \frac{\partial W}{\partial t} = 0$$

என்பதால்

$$K = H_1$$

எனவே இயக்கச் சமன்பாடுகளை

$$\beta_r = \frac{-\partial H_1}{\partial \alpha_r} \quad r = 1, 2, 3 \ldots\ldots n$$

$$\alpha_r = \frac{\partial H_1}{\partial \beta_r} \quad r = 1, 2, 3 \ldots\ldots n$$

என்று எழுதலாம். இங்கு முதலில் p_r, q_r க்குப் பதில் α_r, β_r மூலம் பிரதியிட்டு H_1 ஐ $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \ldots\ldots \beta_n, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots\ldots \alpha_n, t$ ஆகிய வற்றின் சார்பாக எழுதிக் கொள்ளவேண்டும்.

மேற்கூறிய அமைப்புக்குப் பின்வருமாறு விளக்கம் தரலாம். H என்பது ஒரு கணக்கில் ஆமில்டோனியன் என்க. அந்நிலையில் q_r, pr ஆகியவற்றைக் கணக்கிட வேண்டும்.

$$H = H_0 + H_1$$

என்க. H_0 ஐ மட்டுமே ஆமில்டோனியனுகக் கொண்டிருந்தால் (42) ஐக் கொண்டு தீர்வுகள் $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \ldots\ldots \beta_n, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots\ldots \alpha_n$ மூலம் கிடைத்திருக்கும். இம்முறையே 6·10 ல் விவரிக்கப்பட்டது. ஆமில்டோனியன் H_0 மட்டுமின்றி $H_0 + H_1$ என்ற நிலையில் $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \ldots\ldots \beta_n, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots\ldots \alpha_n$ என்பன தீர்வுகளில் மாறிக ளாகா. ஏனெனில் அவை (43)-ஆம் சமன்பாடுகளைச் சரிசெய்ய வேண்டுமே! ஆயினும் தீர்வுகளை H_0 கணக்கில் போலவே $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots\ldots \beta_n, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots\ldots \alpha_n$ ல் எழுதிக் கொள்வோம். ஆனல் β_r, α_r, ஆகியவை இப்போது மாறிலிகளல்ல. (43)-ஆம் சமன்பாடுகளுக்கிணங்க மாறுபவை என்று கொள்ளவேண்டும்.

H_0 ன் மூலம் கிடைத்த தீர்வினை அசைவற்ற தீர்வு (unperturbed solution) என்றும், H_1 ஐ அசைவுதரும் ஆமில்டோனியன் (perturbing Hamiltonian) என்றும் குறிப்பர். H ன் மூலம் கிடைக்கும் தீர்வினை அசைவுபெற்ற தீர்வு (perturbed solution) என்று கூறுவோம்.

எடுத்துக் காட்டு : 5

ஒரு துகள் ஒரு கோட்டில் நகர்ந்து செல்கிறது. அதன் மேல் μ (தூரம்) என்ற விதிப்படி ஒரு மையவிசை தாக்குகிறது. 6·11-இல் விவரித்த முறையில் அதன் இயக்கத்தை விளக்குக.

துகளின் திணிவு m என்க. விசை மையத்திலிருந்து அதன் தூரம் t நேரத்தில் q என்க. முதலில் ஒரு விசையும் இல்லை என்க. அதன் ஆமில்டோனியன் H_0 எனில்,

$$H_0 = \frac{p^2}{2m}$$

என்பது தெளிவு. மையவிசையின் நிலைமச்சார்பு $m \frac{\mu}{2} q^2$ என்க.

அப்போது ஆமில்டோனியன்

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \mu q^2$$

எனவே அசைவுதரும் ஆமில்டோனியன்,

$$H_1 = \frac{1}{2} m \mu q^2$$

முதலில் H_0 கணக்கைத் தீர்ப்போம். ஆமில்டன் ஜாகோபிச் சமன்பாட்டிலிருந்து

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2 + \frac{\partial W}{\partial t} = 0$$

$$W = A + B,$$

A ஆனது q ன் சார்பு, B ஆனது t ல் சார்பு என்க. இதனைப் பிரதியிட

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{dA}{dq}\right)^2 + \frac{dB}{dt} = 0$$

$$\therefore \frac{1}{2m}\left(\frac{dA}{dq}\right)^2 = \frac{-dB}{dt}$$

$$= \frac{\alpha}{m}$$

என்க.

$$\frac{dA}{dq} = \sqrt{2\alpha}$$

$$\therefore A = \sqrt{2\alpha}\, q$$

$$B = -\frac{\alpha t}{m}$$

$$\therefore W = \sqrt{2\alpha} \cdot q - \frac{\alpha t}{m}$$

$$\beta = -\frac{\partial W}{\partial \alpha} = -\frac{q}{\sqrt{2\alpha}} + \frac{t}{m}$$

$$p = \frac{\partial W}{\partial q} = \sqrt{2\alpha}$$

ஆகவே H_0 கணக்கின் தீர்வு

$$\left.\begin{aligned} p &= \sqrt{2\alpha}, \\ q &= \sqrt{2\alpha}\left(\frac{t}{m} - \beta\right) \end{aligned}\right\} \qquad \text{(i)}$$

இங்கு α, β என்பன நியமன மாறிலிகள். இப்போது H கணக்கின் தீர்வு இதே சமன்பாடுகளால் பெறப்படும்; ஆனால் அங்கு α, β என்பன மாறிலிகளல்ல. α, β ஐ

$$\dot{\alpha} = \frac{\partial H_1}{\partial \beta}$$

$$\dot{\beta} = \frac{-\partial H_1}{\partial \alpha}$$

என்ற சமன்பாடுகளின் மூலம் தீர்க்கவேண்டும்

$$H_1 = \frac{1}{2} m \mu q^2$$

$$= \frac{1}{2} m \mu\, 2\alpha \left(\frac{t}{m} - \beta\right)^2$$

எனவே,

$$\dot{\alpha} = -2m\mu\alpha\left(\frac{t}{m} - \beta\right)$$

$$\dot{\beta} = -m\mu\left(\frac{t}{m} - \beta\right)^2$$

இவற்றிலிருந்து

$$\alpha = a\cos^2(\sqrt{\mu}\, t + b)$$

$$\beta = \frac{t}{m} - \frac{1}{m\sqrt{\mu}} \tan(\sqrt{\mu}\, t + b)$$

என்று பெறுகிறோம். இவற்றை (i)ல் பிரதியிட,

$$p=\sqrt{2a}\cos(\sqrt{\mu}\ t+b)$$

$$q=\sqrt{2a}\ \cos(\sqrt{\mu}\,t+b)\frac{\tan(\sqrt{\mu}\ t+b)}{m\sqrt{\mu}}$$

அதாவது

$$p=\frac{\sqrt{2a}}{m\sqrt{\mu}}\ \sin(\sqrt{\mu}\ t+d)$$

இவையே நமக்குப் பழக்கமான $x=A\sin(\sqrt{\mu}\ t+b)$, $m\dot{x}=mA\ \sqrt{\mu}\cos\ (\sqrt{\mu}\ t+b)$ என்ற சமன்பாடுகளாகும். இவ்விதமாக H கணக்கு தீர்க்கப்பட்டது.

பயிற்சி

1. பின்வருவன தொடுகை மாற்றங்களை நிறுவுகின்றனவா என்று ஆராய்க.

(i) $Q=(2q)^{\frac{1}{2}}e^{k}\cos p,\ P=(2q)^{\frac{1}{2}}\ e^{-k}\sin p$

(ii) $P=\dfrac{1}{q}$, $Q=p\,q^{2}$ (iii) $Q=p, P=q$

(iv) $Q=\log\left(\dfrac{1}{q}\sin P\right)$ $P=q\cot p$

2. $W, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3 \cdots \Omega_k$ என்பன $q_1, q_2, q_3\ldots\ldots q_n, Q_1, Q_2, Q_3\ldots Q_n$ ஆகிய $2n$ மாறிகளில் கொடுத்துள்ள $k+1$ சார்புகள் என்க. $k\leq n$ என்க. சமன்பாடுகள் (22) (26) மூலம் $(Q_1, Q_2, Q_3\ldots\ldots Q_n, P_1, P_2, P_3\ldots\ldots P_n, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\ldots\ldots\lambda_k)$ என்ற $2n+k$ மாறிகள் $q_1, q_2, q_3\ldots q_n, p_1, p_2, p_3\ldots\ldots p_n$-ல் வரையறுக்கப்பட்டால் $Q_1, Q_2, Q_3\ldots\ldots Q_n, P_1\ P_2, P_3\ldots\ldots P_n)$ என்பன. $(q_1, q_2, q_3\ldots\ldots q_n, p_1, p_2, p_3\ldots\ldots P_n)$ இலிருந்து ஒரு தொடுகை மாற்றத்தினால் தருவிக்கப்படும் என்று காட்டுக.

3. (29), (30)ம் சமன்பாடுகளைக்கொண்டு (31)ம் சமன்பாடுகத் தருவிக்க.

4. ஒரு துகள் ஒரு கோட்டில் v என்ற வேகத்தில் நகர்ந்துகொண்டிருக்கிறது. வெளிவிசைகள் ஏதுமில்லை. அதற்கு ஆமில்டோனியன் $\frac{1}{2}P^2$ என்று காட்டுக. இதற்கு ஆமில்டன்-ஜாகோபிச் சமன்பாட்டிலிருந்து W என்னும் சார்பையும் பிறகு தொடுகை மாற்றச் சமன்பாடுகளையும் தருவிக்க. $pdq-PdQ$ என்பது dW ஆகிறதா என்றும் சரிபார்க்க.

5. $H=\frac{1}{2}p^2-\dfrac{\mu}{q}$ என்பது ஒரு துகள் கோட்டில் ஒரு மைய விசையின் தாக்குதலால் நகர்வதற்கான ஆமில்டோனியன். இவ்விசையினைக் காண்க.

ஆமில்டன் ஜாகோபிச் சமன்பாட்டைக்கொண்டு W ஐயும், பிறகு தொடுகை மாற்றச் சமன்பாடுகளையும் எழுதுக. இயக்கக் கணக்கைத் தீர்க்க.

6. லாகிராஞ்சு அடைப்புகளுக்கும் பாயிசான் அடைப்புகளுக்கும் இடையே உள்ள உறவுகளை நிறுவுக.

[குறிப்பு : $\sum_{r=1}^{2n} \left\{u_r , u_i\right\} \left[u_r , u_j\right] =$

$$\sum_{r=1}^{2n} \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} \left(\frac{\partial u_r}{\partial q_\lambda}\frac{\partial u_i}{\partial p_\lambda} - \frac{\partial ur}{\partial p_\lambda}\frac{\partial u_i}{\partial q_\lambda}\right) \left(\frac{\partial q_\mu}{\partial u_r}\frac{\partial p_q}{\partial u_j} - \frac{\partial_q}{\partial u_r}\frac{\partial q_q}{\partial u_j}\right)$$

7. $[\alpha_i , \alpha_j]$ என்பது ஒரு லாகிராஞ்சு அடைப்பு s, x, y என்பன $\alpha_1 , \alpha_2 , \alpha_3$ ஆகியவற்றில் சார்புகள் என்க.

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_k}[\alpha_i , \alpha_j] + \frac{\partial}{\partial \alpha_i}[\alpha_j , \alpha_k] + \frac{\partial}{\partial \alpha_j}[\alpha_k , \alpha_i] = 0$$ என்று காட்டுக.

7. மூலகங்களில் மாற்றங்களும் பொது அசைவுகளும்

(Variation of Elements and General Perturbations)

7·1. பலபொருள் இயக்கம் (n-body problem)

$m_1, m_2, \ldots\ldots\ldots, m_n$ என்ற திணிவுகளைக் கொண்ட n துகள்கள் ஒன்றையொன்று தலைகீழ் வர்க்க விதிப்படி ஈர்ப்பனவாக அமையட்டும். m_i, m_j என்ற இருதுகள்களினிடையேயுள்ள தூரம் r_{ij} எனில், இத்துகள்களின் நிலைமச்சக்தி (potential energy)

$U = -G \sum\sum_{j,\,i=1}^{n} \frac{m_i\, m_j}{r_{ij}}$ ஆகும். இவற்றின் இருப்பிடங்களின் கார்ட்டீசியன் கூறுகள் (x_i, y_i, z_i) எனில், m_i எனும் துகளுக்கு இயக்கச் சமன்பாடுகள் :

$$m_i\, \ddot{x}_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad m_i\, \ddot{y}_i = -\frac{\partial U}{\partial y_i}, \quad m_i\, \ddot{z}_i = -\frac{\partial U}{\partial z_i} \qquad (1)$$

இம்மாதிரியே ஒவ்வொரு துகளுக்கும் மூன்று சமன்பாடுகள் உள்ளன ; ஆகமொத்தம் $3n$ சமன்பாடுகள் உள்ளன. இப்போது

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\, \ddot{x}_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} \frac{m_i\, m_j\, (x_i - x_j)}{r_{ij}^3} .$$

இங்கு $\frac{m_i\, m_j\, (x_i - x_j)}{r_{ij}^3} + \frac{m_j\, m_i\, (x_j - x_i)}{r_{ji}^3} = 0$

என்பதால், $\Sigma\, m_i\, \ddot{x}_i = 0$ · ஆனால் $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ என்பது இத்துகள்களின் திணிவு மையம் எனில்,

$$\frac{\Sigma\, m_i\, x_i}{\Sigma\, m_i} = \bar{x}, \quad \frac{\Sigma\, m_i\, y_i}{\Sigma\, m_i} = \bar{y}, \quad \frac{\Sigma\, m_i\, z_i}{\Sigma\, m_i} = \bar{z}$$

என்பதால், $\ddot{\bar{x}} = 0$, $\ddot{\bar{y}} = 0$, $\ddot{\bar{z}} = 0$. இவற்றைத் தொகையீடு செய்ய,

$$\bar{x} = a_1 t + b_1\, , \quad \bar{y} = a_2 t + b_2\, , \quad \bar{z} = a_3 t + b_3 \qquad (2)$$

இவற்றினின்று, திணிவு மையமானது நிலையான வேகத்துடன், ஒரு நிலையான திசையில் நகர்வது தெரியவருகிறது.

அடுத்த படியாக, $\sum_{i=1}^{n} m_i (y_i \ddot{z}_i - z_i \ddot{y}_i)$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(y_i \frac{\partial U}{\partial z_i} - z_i \frac{\partial U}{\partial y_i} \right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} m_i m_j \left\{ \frac{y_i (z_i - z_j)}{r_{ij}^3} - \frac{z_i (y_i - y_j)}{r_{ij}^3} \right\}$$

$$= \sum \sum \frac{m_i m_j}{r_{ij}^3} (- y_i z_j + z_i y_j)$$

$$= 0$$

இதனைத் தொகையீடு செய்ய,

$$\begin{aligned} \Sigma\, m_i (y_i \dot{z}_i - z_i \dot{y}_i) &= c_1 \\ \Sigma\, m_i (z_i \dot{x}_i - x_i \dot{z}_i) &= c_2 \\ \Sigma\, m_i (x_i \dot{y}_i - y_i \dot{x}_i) &= c_3 \end{aligned} \qquad (3)$$

இம் மூன்று சமன்பாடுகளையும் பரப்பளவுத் தொகையீடுகள் (integrals of area) என்று குறிப்பிடுவது வழக்கம். ஏனெனில், ஒவ்வொரு துகளுக்கும் வரையப்பட்ட ஆரையானது பெருக்கும் பரப்பளவு வேகங்களின் நிறையிட்ட சராசரி ஒரு நிலையான எண் என்பதை இவை காட்டுகின்றன. இன்னொரு விதத்தில் நோக்குமிடத்து, இவற்றிலிருந்து, துகள்களின் மொத்தச் சுழல் உந்தம் நிலையான கணியம் என்பதை அறியலாம்.

கடைசியாக, (1)-ஆம் சமன்பாடுகளை முறையே $\dot{x}_i$, $\dot{y}_i$, $\dot{z}_i$ ஆகியவற்றால் பெருக்கிக் கூட்ட,

$$\Sigma\, m_i (\dot{x}_i \ddot{x}_i + \dot{y}_i \ddot{y}_i + \dot{z}_i \ddot{z}_i)$$

$$= - \Sigma \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial U}{\partial y_i} \dot{y}_i + \frac{\partial U}{\partial z_i} \dot{z}_i \right)$$

$$= - \frac{dU}{dt} \qquad (4)$$

$T = \frac{1}{2} \Sigma\, m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2)$ எனில் இதனை $\frac{dT}{dt} = - \frac{dU}{dt}$ என்றெழுதலாம். இருபுறமும் t ஐப் பொறுத்துத் தொகைப்படுத்த,

$$T = -U + h \qquad (5)$$

இங்கு T என்பது இயக்கச் சக்தி. (5) ஐ சக்தித் தொகையீடு (integral of energy) என்று குறிப்பிடுவார்கள்.

இவ்விதமாக, (x_j , y_i , z_i) என்ற $3n$ மாறிகளில் கொடுத்துள்ள $3n$ சமன்பாடுகளுக்கு, (2)-இன் மூலம் ஆறு, (3)-இன் மூலம் மூன்று, (5)-இன் மூலம் ஒன்று என மொத்தம் பத்துத் தொகையீடுகள் பெறப்பட்டுள்ளன. இவைகளுக்கு வேறு தொகையீடுகள் கிடையாது என்றும் நிரூபிக்கப்பட்டுள்ளது. எனவே பல பொருள் இயக்கச் சமன்பாடுகள் பொதுவில் தீர்க்க இயலாதவையாகின்றன. இரு சிறப்பு வகை முப்பொருள் இயக்கச் சமன்பாடுகளை லாகிராஞ்சு என்பவர் 1772-இல் தீர்த்துள்ளார். இவற்றைச் சமபக்க முக்கோணத் தீர்வு (equilateral triangle solution) நேர் கோட்டுத் தீர்வு (straight line solution) என்று வானியல் வல்லுநர்கள் குறிப்பிடுவர். மற்றொரு சிறப்பு வகைத் தீர்வும் காணப்பட்டுள்ளது. இதில், மூன்று பொருள்களில் ஒன்றின் திணிவு மிகச் சிறியது. ஆகவே அதனை ஈர்ப்பு விசைக் கணிப்புகளில் விட்டுவிடலாம் என்ற கருத்து மேற்கொள்ளப் படுகிறது.

மேலே விவரித்த முறையைப் பயன்படுத்தி, சூரிய குடும்பத்தின் இயக்கத்தினை இனி ஆராய்வோம். m என்பது ஒரு குறிப்பிட்ட கிரகத்தின் திணிவு, $m_1 , m_2 , \ldots m_{n-2}$ என்பன ஏனைய கிரகங்களின் திணிவுகள். சூரியனின் திணிவு 1 எனக் கொள்க. இந்த n பொருள்களின் திணிவு மையத்தை ஆதிப்புள்ளியாகக் கொண்டு, $O\xi, O\eta, O\zeta$ என்ற நிலையான அச்சுகளை மேற்கொள்க. இவற்றைப் பொறுத்து mன் இருப்பிடம் (ξ , η , ζ), சூரியனின் இருப்பிடம் $(\xi_s , \eta_s , \zeta)_s$ என்க. மேலும், சூரியனின் இருப்பிடத்தை ஆதிப்புள்ளியாகக் கொண்டு, இந்த அச்சுகளுக்கு இணையாக Sx , Sy , Sz என்ற அச்சுகளை எடுத்துக் கொள்க. இந்த அச்சுகளைப் பொறுத்து mன் இருப்பிடம் (x , y , z), மற்ற கிரகங்களின் இருப்பிடங்கள் $(x_i\ y_i\ z_i)$, $=1,2,\ldots n-2$ என்க. சூரியனுக்கும் mக்கு மிடையேயுள்ள தூரம் r, சூரியனுக்கும் m_iக்கு மிடையேயுள்ள தூரம் ρ_i, mக்கும் m_iக்கு மிடையேயுள்ள தூரம் $\triangle_i$ என்க.

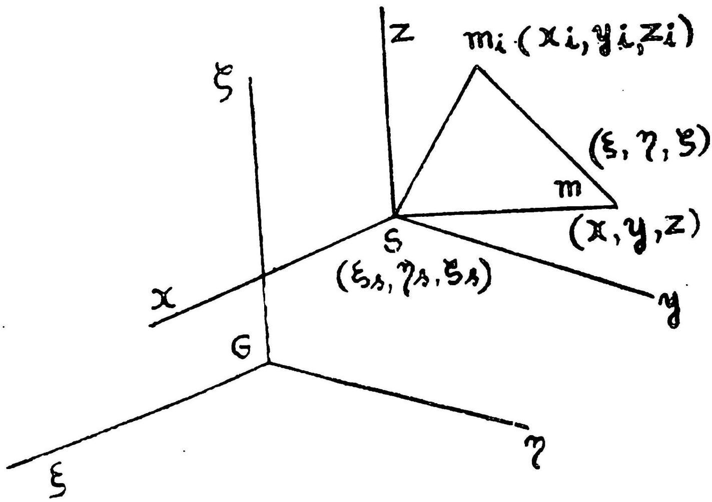
$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 , \ \rho_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 ,$$

$$\triangle_i^2 = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2$$

என்ற உறவுகளைக் கவனிக்க.

சூரியனின் இயக்கச் சமன்பாடுகளிலொன்று

$$1 \quad \ddot{\xi}_s = k^2 \cdot \frac{1 \cdot m \cdot x}{r^3} + k^2 \sum_{i=1}^{2n-2} \frac{1 \cdot m_i x_i}{\rho_i^3}$$



படம் 7·1

mன் இயக்கச் சமன்பாடுகளிலொன்று

$$m\ddot{\xi} = -k^2 m \cdot 1 \cdot \frac{x}{r^3} - k^2 \sum_{i=1}^{n-2} \frac{m\, m_i\,(x-x_i)}{\Delta_i^3}$$

அதாவது

$$\ddot{\xi} = -\frac{k^2 x}{r^3} - k^2 \sum_{i=1}^{n-2} m_i \frac{(x-x_i)}{\Delta_i^3}$$

$x=\xi-\xi_s$ என்பதால் $\ddot{x} = \ddot{\xi} - \ddot{\xi}_s$

எனவே $$\ddot{x} = -\frac{\mu x}{r^3} - k^2 \sum_{i=1}^{n-2} m_i \left\{ \frac{x-x_i}{\Delta_i^3} + \frac{x_i}{\rho_i^3} \right\} \qquad (6)$$

இவ்வாறே $$\ddot{y} = -\frac{\mu y}{r^3} - k^2 \sum m_i \left\{ \frac{y-y_i}{\Delta_i^3} + \frac{y_i}{\rho_i^3} \right\} \qquad (7)$$

$$\ddot{z} = -\frac{\mu z}{r^3} - k^2 \sum m_i \left\{ \frac{z-z_i}{\Delta_i^3} + \frac{z_i}{\rho_i^3} \right\} \qquad (8)$$

இங்கு $\mu = k^2(1+m)$ மேலும்

$$V = -\frac{\mu}{r} - R \qquad (\,)$$

$$R = k^3 \sum_{i=1}^{n-2} m_i \left\{ \frac{1}{\Delta_i} - \frac{x\,x_i + y\,y_i + z\,z_i}{\rho_i^3} \right\}$$ என்று கொள்க (10)

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\mu x}{r^3} + k^2 \left\{ \Sigma m_i \left(\frac{x - x_i}{\Delta_i^3} \frac{x_i}{\rho_i^3} \right) \right\}$$

என்பதனுல் (6), (7), (8) சமன்பாடுகளை

$$\ddot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad \ddot{y} = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad \ddot{z} = -\frac{\partial V}{\partial z} \qquad (11)$$

என்று எழுதலாம். Rஐ அசைக்கும் சார்பு (disturbing function என்பர்.

(11)ம் சமன்பாடுகளை லாகிராஞ்சு இயக்கச் சமன்பாடுகளை எழுதியும் பெற முடியும்.

$$T = \tfrac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2), \; L = T - V$$

என்று எழுதினுல், $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$ என்ற சமன்பாடு $\frac{d}{dt}(\dot{x}) = -\frac{\partial V}{\partial x}$ என்ருகிறது. இங்கு V என்பது (9)-லிருந்து பெறப்படும். x, y, z ஆகியவையே லாகிராஞ்சின் பொதுப் படுத்தப்பட்ட கூறுகள். $x_i\; y_i,\; z_i$ என்பன நேரம் tன் சார்பு களாயினும், அவை இத்தகைய கூறுகளாக அமையவில்லை என்பதைக் கவனிக்க.

ஆமில்டன் முறையில்,

$$H = \tfrac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - \frac{\mu}{r}, -R \qquad (12)$$

என்று அமைகிறது. r ஆனது x, y, z ல் சார்பு. R ஆனது $(x, y, z, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots\ldots, x_{n-2}, y_{n-2}, z_{n-2})$ ஆகியவற்றைப் பொறுத்திருக்கிறது. $H = H_0 + H_1$ என்று எழுதுக.

$$H_0 = \tfrac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - \frac{\mu}{r}, \quad H_1 = -R$$ என்க.

$$H_1 = -k^2 \sum_{i=1}^{n-2} m_i \left\{ \frac{1}{\Delta_i} - \frac{1}{\rho_i^3}(x x_i + y y_i + z z_i) \right\} \qquad (13)$$

சூரிய குடும்பத்தில் k^2m_1 ஆனது மிகச் சிறிய எண்ணாகும். எடுத்துக்காட்டாக, மிகப் பெரிய கிரகமான வியாழனின் (Jupiter) திணிவு சுமார் $\frac{5\cdot977\times10^{27}}{1\cdot999\times10^{33}}\times318=\cdot001$. பூமியின் மீது வியாழனின் ஈர்ப்பு விசையே மிகப் பெரியது; இதுவே சூரியனின் ஈர்ப்பு விசையில் $\frac{1}{17000}$ பாகம்தான். செவ்வாயின் மேல் வியாழனின் ஈர்ப்பு விசையானது சூரியனின் ஈர்ப்பு விசையில் சுமார் $\frac{1}{6000}$ பாகம்தான். இக்காரணங்களினால் H_1 மிகச் சிறியது, H_1ன் விளைவாக கிரகங்களின் போக்கில் ஏற்படும் மாறுதல்கள் மிகச் சிறியவையாக இருக்கும் என்பது தெளிவு.

சென்ற அத்தியாயத்தில் (6·11)ல் விவரித்த முறைப்படி, இப்போது ஆமில்டன் முறையில் இயக்கச் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க முயல்வோம். முதலில் H_0 கணக்கினைச் செய்வோம்.

7·2 m என்ற திணிவுள்ள கிரகத்தின் இயக்கத்தைக் கருதும்போது, மற்ற கிரகங்களின் ஈர்ப்பு விசைகளை மிகச் சிறியவை என்று கருதி நீக்கிவிட்டால், H_0 என்பதே ஆமில்டோனியன் ஆகும். இதனைத் தீர்த்து பெறப்படுவது அசைவற்ற தீர்வு (unperturbed solution) எனப்படும். இப்போது m ன் மீது சூரியனின் ஈர்ப்பு விசை மட்டுமே இருப்பதால், பரிதிமையக் கூறுகளில் இது ஒரு பொருள் இயக்கமாகிறது. ஆகவே H_0 கணக்கின் தீர்வும், ஒரு-பொருள் இயக்கச் சமன்பாடுகளின் தீர்வும் ஒன்றே. ஆனால் H_0 கணக்கின் தீர்வில் கிடைப்பவை நியமன மாறிலிகள் (canonical constants); ஒரு-பொருள் இயக்கச் சமன்பாடுகளின் தீர்வில் கிடைப்பவை நீள் வளையப் பாதைக் கூறுகள். இவ்விருவகை மாறிலிகளையும் நாம் சம்பந்தப்படுத்துதல் அவசியம். அப்போதுதான் 6·11-இல் விவரிக்கப் பட்ட முறைகளைக் கையாளமுடியும்.

பரிதி மையக் கூறுகளில் நாம் இப்போது ஆரைக்கோணக் கூறுகளை மேற்கொள்வோம். β என்பது வானக் குறுங் கோட்டுக் கோணம், λ என்பது வான நெடுங் கோட்டுக் கோணம் என்க. Oxஐ மேட முதற் புள்ளி வழியே செல்லுமாறு எடுத்துக்கொள்க. xOy தளமானது தோற்றப் பாதைத் தளம். ds என்பது ஒரு சிறு வில்லின் நீளம் எனில்

$$ds^2=dr^2+r^2\cos^2\beta\, d\lambda^2+r^2d\beta^2$$

எனவே $v^2=\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=\dot{r}^2+r^2\cos\beta\ \dot{\lambda}^2+r^2\beta^2,$

$$L_0=\tfrac{1}{2}v^2+\frac{\mu}{r}=\tfrac{1}{2}(\dot{r}^2+r^2\cos^2\beta\ \dot{\lambda}^2+r^2\dot{\beta}^2)+\frac{\mu}{r},$$

$$\therefore\ p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \dot{r},\ p_\lambda = \frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}} = r^2 \cos^2\beta\, \dot{\lambda},$$

$$p_\beta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\beta}} = r^2 \dot{\beta}$$

$$\therefore\ H_o = p_r \dot{r} + p_\lambda \dot{\lambda} + p_\beta \dot{\beta} - L$$

$$= p_r p_r + \frac{p_\lambda p_\lambda}{r^2\cos^2\beta} + \frac{p_\beta p_\beta}{r^2} - \frac{1}{2}\left\{p_r^2 + \frac{p_\lambda^2}{r^2\cos^2\beta} + \frac{p_\beta^2}{r^2}\right\} - \frac{\mu}{r}$$

$$= \frac{1}{2}\left(p_r^2 + \frac{p_\lambda^2}{r^2\cos^2\beta} + \frac{p_\beta^2}{r^2}\right) - \frac{\mu}{r} \qquad \text{.........} \quad (14)$$

H_o-ல் t ஆனது வெளிப்படையாக இல்லாததால், ஆமில்டன் ஜாகோபி சமன்பாட்டில் $W = W' - \alpha_1 t$ என்று பிரதியிட்டால்,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W'}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2\cos^2\beta}\left(\frac{\partial W'}{\partial \lambda}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial W'}{\partial \beta}\right)^2\Big\} = \alpha_1 + \frac{\mu}{r}$$

அதாவது

$$\left(\frac{\partial W'}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2\cos^2\beta}\left(\frac{\partial W'}{\partial \lambda}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial W'}{\partial \beta}\right)^2 = 2\alpha_1 + \frac{2\mu}{r} \quad (15)$$

H_o ல் λ வெளிப்படையாக இராததனால் **மாறிகளைப் பிரித்தல்** முறையில் (method of separation of variables) இச் சமன் பாட்டைத் தீர்ப்பது எளிது.

$$W' = \alpha_3 \lambda + F(r,\beta)$$

என்றிடுக. கிடைப்பது

$$r^2\left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial \beta}\right)^2 + \alpha_3^2 \sec^2\beta = \left(2\alpha_1 + \frac{2\mu}{r}\right) r^2$$

அதாவது $r^2\left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)^2 - \left(2\alpha_1 + \frac{2\mu}{r}\right) r^2 = -\left\{\left(\frac{\partial F}{\partial \beta}\right)^2 + \alpha_3^2 \sec^2\beta\right\}$

$= \alpha_2^2$ என்க.

$$\therefore\quad \frac{\partial W'}{\partial r} = \frac{\partial F}{\partial r} = \sqrt{2\alpha_1 + \frac{2\mu}{r} - \frac{\alpha_2^2}{r^2}} = \frac{A}{r}$$

$$\frac{\partial W'}{\partial \lambda} = \alpha_3$$

$$\frac{\partial W'}{\partial \beta} = \frac{\partial F}{\partial \beta} = \sqrt{\alpha_2^2 - \alpha_3^2 \sec^2\beta} = B$$

என்க. இங்கு $A = \sqrt{2\alpha_1 r^2 + 2\mu r - \alpha_2^2}$, $B = \sqrt{\alpha_2^2 - \alpha_3^2 \sec^2}$

$$dW' = \frac{\partial W'}{\partial r} dr + \frac{\partial W'}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial W'}{\partial \beta} d\beta$$

$$= \frac{A}{r} dr + \alpha_3 d\lambda + B d\beta$$

என்பதால் $W' = \int_{r_0}^{r} \frac{A}{r} dr + \alpha_3 \lambda + \int_{\beta_0}^{\beta} B\, d\beta$

இங்கு r_0, β_0 என்பவை ஏதேனுமிரு மாறிலிகள். இப்போது

$$A^2 = 2\alpha_1 r^2 + 2\mu r - \alpha_2^2$$

எனவே $\frac{\partial A}{\partial \alpha_1} = 2r^2$, $\therefore \frac{\partial A}{\partial \alpha_1} = \frac{r^2}{A}$

$$2A \frac{\partial A}{\partial \alpha_2} = -2\alpha_2, \quad \therefore \frac{\partial A}{\partial \alpha_2} = -\frac{\alpha^2}{A}$$

மேலும் $B^2 = \alpha_2^2 - \alpha_3^2 \sec^2\beta$

னவே $2B \frac{\partial B}{\partial \alpha_2} = 2\alpha_2$, $\therefore \frac{\partial B}{\partial \alpha_2} = \frac{\alpha_2}{B}$

$$2B \frac{\partial B}{\partial \alpha_3} = -2\alpha_3 \sec^2\beta, \quad \therefore \frac{\partial B}{\partial \alpha_3} = -\frac{\alpha_3 \sec^2\beta}{B}$$

அத்தியாயம் 6, (41)-ஆம் சமன்பாடுகளின்படி, தீர்வுகள்

$$t - \beta_1 = \frac{\partial W'}{\partial \alpha_1} = \int_{r_0}^{r} \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial \alpha_1} dr$$

$$= \int_{r_0}^{r} \frac{1}{r} \cdot \frac{r^2}{A} dr = \int_{r_0}^{r} \frac{r}{A} dr \qquad (16)$$

$$-\beta_2 = \frac{\partial W'}{\partial \alpha_2} = \int_{r_0}^{r} \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial \alpha_2} dr + \int_{\beta_0}^{\beta} \frac{\partial B}{\partial \alpha_2} d\beta$$

$$= -\int_{r_0}^{r} \frac{\alpha_2}{Ar} dr + \int_{\beta^0}^{\beta} \frac{\alpha_2}{B} d\beta \qquad (17)$$

$$-\beta_3 = \frac{\partial W'}{\partial \alpha_3} = \lambda + \int_{\beta_0}^{\beta} \frac{\partial B}{\partial \alpha_3} d\beta = \lambda - \int_{\beta_0}^{\beta} \frac{\alpha_3 \sec^2 \beta}{B} d\beta \tag{18}$$

$$p_r = \frac{\partial W'}{\partial r} = \frac{A}{r} \tag{19}$$

$$p_\lambda = \frac{\partial W'}{\partial \lambda} = \alpha_3 \tag{20}$$

$$p_\beta = \frac{\partial W'}{\partial \beta} = B \tag{21}$$

இவற்றில் $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ என்பன நியமன மாறிலிகள். இவற்றைச் சுற்றுப் பாதையின் மூலகங்களுடன் இணைக்கவேண்டும்.

r_0 என்பது அண்மைப்புள்ளியின் தூரம் என்க. $r = r_0$ எனில், (16)-இலிருந்து பெறுவது $t = \beta_1$. எனவே β_1 என்பதே அண்மைப் புள்ளியைக் கடக்கும் நேரம் T.

அண்மைப் புள்ளி (அல்லது சேய்மைப் புள்ளி) ஒரு கவியத்தைக் குறிக்கிறது. எனவே அங்கு $r = 0$, அதாவது $p_r = 0$. எனவே $A = 0$. இதனால் $2\alpha_1 r^2 + 2\mu r - \alpha_2^2$க்கு r_0 என்பது ஒரு பூச்சியம். A^2 ஐக் காரணிப்படுத்தி.

$$A^2 = -2\alpha_1 (r - r_0)(r_2 - r)$$

என்று எழுதலாம். இவ்விதம் r_0 ம், r_2 ம் அண்மை, சேய்மைப் புள்ளிகளின் தூரங்களைத் தருகின்றன. ஆனால் இவை $a - ae$, $a + ae$ என்று நாமறிவோம். எனவே

$$a - ae + a + ae = -\frac{2\mu}{2\alpha_1}, \quad (a - ae)(a + ae) = -\frac{\alpha_2^2}{2\alpha_1}$$

அதாவது $\alpha_1 = -\dfrac{\mu}{2a}$, $\alpha_2^2 = -2\alpha_1 (a^2 - a^2 e^2) = \mu a (1 - e^2)$

α_1 என்பது சக்தித் தொகையீடு என்பதையும், $\alpha_2 = \sqrt{\mu a (1 - e^2)} = h$, அதாவது பரப்பளவு வேகம் என்பதையும் கவனிக்க.

அடுத்தபடியாக $\dfrac{\alpha_3}{\alpha_2} = \cos i$ என்றிடுக. (17)-லுள்ள இரண்டாவது தொகையீடுதனில்

$$\sin \beta = \sin i \sin u \tag{22}$$

என்று பிரதியிடுக :

$$\int_{\beta_0}^{\beta} \frac{\alpha_3}{B} d\beta = \int_{\beta_0}^{\beta} \frac{\alpha_2 \, d\beta}{\sqrt{\alpha_2^2 - \alpha_2^2 \cos^2 i \sec^2 \beta}}$$

$$= \int_{\beta_0}^{\beta} \frac{d\beta}{\sqrt{1 - \frac{\cos^2 i}{\cos^2 \beta}}} = \int_{u_0}^{u} du = u - u_0$$

β_0 ஐ பூச்சியமெனக் கொண்டால் $u_0 = O$. எனவே (17)-ஆம் சமன்பாட்டிலிருந்து

$$-\beta_2 = -\int_{r_0}^{r} \frac{\alpha_2}{rA} dr + u \tag{23}$$

என்றறிகிறோம். (18)ம் சமன்பாட்டிலுள்ள தொகையீட்டிற்கு

$$\sin \Psi = \cot i \tan \beta \tag{24}$$

என்ற பிரதியீட்டைப் பயன்படுத்துக.

$$\int_{\beta_0}^{\beta} \frac{\alpha_3 \sec^2 \beta}{B} d\beta = \int_{\beta_0}^{\beta} \frac{\alpha_3 \cos i \, . \sec^2 \beta}{\sqrt{\alpha_2^2 - (\alpha_2 \cos i)^2 \sec^2 \beta}}$$

$$= \int_{\beta_0}^{\beta} \frac{\cos i \sec^2 \beta}{\sqrt{1 - \sec^2 \beta \cos^2 i}} d\beta$$

$$= \int_{0}^{\Psi} \frac{\sin i \cos \Psi \, d\Psi}{\sqrt{\sin^2 i - \sin^2 i \sin^2 \Psi}} = \int_{0}^{\Psi} d\Psi = \Psi$$

எனவே (18)-ஆம் சமன்பாட்டிலிருந்து நாம் பெறுவது :

$$-\beta_3 = \lambda - \Psi \tag{25}$$

(22), (24)-ஆம் சமன்பாடுகளிலிருந்து $\tan^2 \Psi = \frac{\sin^2\Psi}{1-\sin^2\Psi}$

$$= \frac{\cot^2 i \tan^2 \beta}{1 - \cot^2 i \tan^2 \beta} = \frac{\cos^2 i \sin^2 \beta}{\sin^2 i - \sin^2 \beta}$$

$$= \frac{\cos^2 i \sin^2 i \sin^2 u}{\sin^2 i - \sin^2 i \sin^2 u} = \frac{\cos^2 i \sin^2 u}{\cos^2 u}$$

$$\therefore \tan\Psi = \cos i \tan u \tag{26}$$

(25)லிருந்து $\tan(\lambda + \beta_3) = \cos i \tan u$ (27)

5·4-இலுள்ள சமன்பாடுகளுடன் (22), (27) ஐ ஒப்பிட்டால், கிரகத்தின் பாதை, தோற்றப் பாதைத் தளத்திற்கு i கோண அளவு சாய்ந்துள்ளது தெரியவரும். மேலும் u என்பது அங்கு குறிப்பிட்ட குறுக்குக்கோட்டுக் கோணவீச்சம் (argument of the latitude) ஆகும். இப்போது (23)ன்படி $r=r_o$ எனில் $-\beta_2=u$. அதாவது $-\beta_2$ என்பது அண்மைப்புள்ளியின் வீச்சம் ω ஆகும். $\lambda+\beta_3$ என்பது ஏறுகோள் சந்தியிலிருந்து கிரகத்திற்குத் தோற்றப்பாதையில் அளக்கப்படும் u' எனும் கோணமாதலால், $\lambda+\beta_3=\lambda-\Omega$, அதாவது $-\beta_3$ என்பதே Ω எனும் ஏறுகோள் சந்தியின் நெடுங்கோட்டுக் கோணம்.

கடைசியாக, α_3 என்பது p_λவின் நிலையான மதிப்பு. ஆனால் p_λ என்பது z அச்சைப் பொறுத்த நிலையான சுழல் உந்தம், அல்லது பரப்பளவு வேகத்தின் z கூறு. எனவே

$$\alpha_3=h\cos i=\sqrt{\mu a(1-e^2)}\cos i \tag{28}$$

இவ்விதமாக நியமன மாறிலிகளை, சுற்றுப்பாதை மூலகங்களின் சார்புகளாகப் பொருள்படுத்தியுள்ளோம். இவற்றைத் தொகுத்து அடியில் தரப்பட்டுள்ளது.

$$\alpha_1=-\frac{\mu}{2a},\quad \alpha_2=\sqrt{\mu a(1-e^2)},\quad \alpha_3=\sqrt{\mu\alpha\ (1-e^2)}\cos i$$

$$\beta_1=T,\qquad \beta_2=-\omega,\qquad \beta_3=-\Omega$$

இவற்றைத் தீர்த்து, சுற்றுப் பாதை மூலகங்களை, நியமன மாறிலிகளின் சார்புகளாகப் பின்வருமாறும் எழுதலாம்.

$$a=-\frac{\mu}{2\alpha_1},\quad e=\sqrt{1+\frac{2\alpha_1\alpha_2{}^2}{\mu^2}},\quad i=\cos^{-1}\frac{\alpha_3}{\alpha_2},$$

$$\omega=-\beta_2,\qquad \Omega=-\beta_3,\qquad \bar{\omega}=-\beta_2-\beta_3,$$

$$n=\frac{(-2\alpha_1)^{\frac{3}{2}}}{\mu},\quad T=\beta_1,\quad X=-\beta_1\frac{(-2\alpha_1)^{\frac{3}{2}}}{\mu},$$

$$\epsilon=-\beta_2-\beta_3+\frac{(t_o-\beta_1)(-2\alpha_1)^{\frac{3}{2}}}{\mu} \tag{30}$$

இப்போது t எனும் எந்த ஒரு நேரத்திலும் கிரகத்தின் இருப்பிடம் (r,β,λ)ஐ, ஐந்தாம் அத்தியாயத்தில் விளக்கியபடி கணக்கிடலாம். இங்கு முக்கிய சமன்பாடுகளாவன :

$$\mu=k^2(1+m)\qquad\qquad M=E-e\sin E$$

$$n^2a^3=\mu\qquad\qquad r=a(1-e\cos E)$$

$$M=n\,(t-T) \qquad \tan\frac{w}{2}=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\frac{E}{2}$$

$$u=w+\varpi-\Omega$$

$$\sin\beta=\sin i\,\sin u \qquad (31)$$

$$\tan(\lambda-\Omega)=\cos i\,\tan u$$

ஆகியவையே

7·3 இதுவரை H_1 என்ற அசைவு தரும் ஆமில்டோனியனை விட்டு விட்டிருந்தோம். இப்போது அதனை எடுத்துக்கொள்வதால் நேரும் விளைவுகளை ஆராய்வோம்.

H_1ல் p_1, p_2...ஆகியவை இல்லாததைக் கவனிக்க. இதனால் $\frac{\partial H}{\partial p_i}=\frac{\partial H_o}{\partial p_i}$. எனவே $\dot{q}_i=\frac{\partial H}{\partial p_i}$ என்ற சமன்பாடுகள், $\dot{q}_i=\frac{\partial H_o}{\partial p_i}$ என்ற சமன்பாடுகளேயாகும். கொடுத்துள்ள நேரத்தில் நியமன மாறிலிகளின் மதிப்புகள் தெரிந்திருந்தால், அவற்றைப் பிரதியிட்டு p_r, p_λ, p_β ஆகியவற்றை, (19), (20), (21)-இலிருந்து பெற முடியும். (31)-ஆம் சமன்பாடுகளைக் கொண்டு முதலில் r, β ஆகியவற்றைக் கணக்கிட்ட பின்னர்,

$$p_r=\dot{r}\;,\;p_\lambda=r^2\cos^2\beta\,\dot{\lambda},\;p_\beta=r^2\,\dot{\beta} \qquad (32)$$

என்பதால், $\dot{r}$, $\dot{\lambda}$, $\dot{\beta}$ ஆகியவற்றையும் பெறலாம்.

நியமன மாறிலிகளுடன் (30)-ஆம் சமன்பாடுகளின் மூலம் உறவு பூண்ட a, e, i, ω, Ω, T போன்றவை **கொஞ்சு மூலகங்கள்** (osculating elements) எனப்படும். இவை நிலையான எண்களல்ல ; நேரத்துடன் மாறுபவை. ஒவ்வொரு நேரத்திலும் அவை சுற்றுப் பாதையின் சரியான மூலகங்களைத் தருகின்றன ; இம்மூலகங்களைக் கொண்டு (31)ஆம் சமன்பாடுகளைப்பயன்படுத்தி, சரியான இருப்பிடத்தையும், (32)-ஆம் சமன்பாடுகளிலிருந்து சரியான வேகங்களையும் பெறலாம்.

குறிப்பிட்ட ஒரு நேரத்தில் கணக்கிடப்பட்ட சுற்றுப் பாதை மூலகங்கள் ஒரு நீள்வளையப் பாதையை நிறுவுதலுடன்கூட, அப்பாதையில் கிரகத்தின் வேக அளவுகளையும் தருகின்றன. ஆனால் கிரகம் உண்மையில் எக்காலத்துக்கும் இதே பாதையில் செல்லாது. ஏனெனில் கிரகத்தின்மேல் பல ஈர்ப்பு விசைகள் அளவிலும் திசையிலும் நேரம் செல்லச் செல்ல மாறுபடுபவையாக அமைந்துள்ளன. எனவே இப்பாதையைக் **கொஞ்சு** பாதை

(osculating orbit) என்று குறிப்பிடுவோம். கொஞ்சு பாதையானது உண்மைப் பாதையினின்று வேறுபட்டது. ஒவ்வொரு நேரத்திலும் ஒவ்வொரு கொஞ்சு பாதை நிறுவப்படும். ஆனால் உண்மைப் பாதை இவை அனைத்திலிருந்தும் வேறுபட்டிருக்கும். எனினும், முன் கூறியது போல், குறிப்பிட்ட நேரத்திற்கான கொஞ்சு பாதை, அந்த நேரத்தில் கிரகத்தின் இருப்பிடத்தையும் வேகக் கூறுகளையும் சரியாகத் தரக் கூடியது. இதனால் கொஞ்சு பாதையைத் தரும் போது அது எந்த நேரத்தைச் சார்ந்தது (instant of osculation) என்பதையும் கூற வேண்டும்.

7.4 மூலகங்களில் மாற்றங்கள்

அசைக்கும் சார்பாகிய R ஆனது, $x, y, z, x_1, y_1, z_1, x_2, \ldots x_{n-2}, y_{n-2}, z_{n-2}$ ஆகியவற்றின் சார்பு என்று முன்பு குறிப்பிட்டோம். x, y, z என்பனவற்றை நியமன மாறிலிகளில் எழுதிய பின்னர் R ஆனது $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$-ல் ஒரு சார்பாக அமையும். ஆமில்டன் முறைப்படி, H கணக்கின் முழுமைத் தீர்வு, (16) முதல் (21) வரையிலுள்ள சமன்பாடுகளின் மூலம் பெறப்படும்; ஆனால் இங்கு αக்களும், βக்களும் மாறிலிகளல்ல, நேரத்துடன்

$$\dot{\alpha}_j = -\frac{\partial R}{\partial \beta_j}, \quad \dot{\beta}_j = \frac{\partial R}{\partial \alpha_j}, \quad j = 1, 2, 3$$

என்ற கட்டுப்பாட்டுக்குட்பட்டு மாறுபவை.

நியமன மாறிலிகளின் வளர்ச்சி வீதங்களான $\dot{\alpha}_i$, $\dot{\beta}_i$ ஐத் தருவதற்குப் பதிலாக, மூலகங்களின் வளர்ச்சி வேகத்தைத் தர இனி முற்படுவோம்.

a, e, i, Ω, ϖ, ϵ ஆகியவற்றை முறையே a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 என்று குறிப்பிடுக. இவை ஒவ்வொன்றும் $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \beta_1, \beta_2, \beta_3$ ஆகியவற்றின் சார்புகளாகக் கருதப்படும்.

$$\dot{a}_i = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial a_i}{\partial \alpha_j} \dot{\alpha}_j + \frac{\partial a_i}{\partial \beta_j} \dot{\beta}_j$$

$$= \sum_{j=1}^{3} \left\{ \frac{\partial a_i}{\partial \alpha_j} \left(-\frac{\partial R}{\partial \beta_j} \right) + \frac{\partial a_i}{\partial \beta_j} \frac{\partial R}{\partial \alpha_j} \right\}$$

$$= \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial a_i}{\partial \alpha_j} \left(- \sum_{k=1}^{6} \frac{\partial R}{\partial a_k} \frac{\partial a_k}{\partial \beta_j} \right) + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial a_i}{\partial \beta_j} \sum_{k=1}^{6} \frac{\partial R}{\partial a_k} \frac{\partial a_k}{\partial \alpha_j}$$

$$= \sum_{k=1}^{6} \frac{\partial R}{\partial a_k} \sum_{j=1}^{3} \left(\frac{\partial a_k}{\partial \alpha_j} \frac{\partial a_i}{\partial \beta_j} - \frac{\partial a_i}{\partial \alpha_j} \frac{\partial a_k}{\partial \beta_j} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{6} \left\{ a_k , a_i \right\} \frac{\partial R}{\partial a_k} \qquad (32)$$

எனவே $\{a_k , a_i\}$, $k=1, 2,\ldots, 6$, $i=1, 2,\ldots,6$ என்ற பாயிசான் அடைப்புகளைக் கணக்கிடுதல் அவசியமாகிறது.

$$\text{(i)} \quad \{a_1 , a_i\} , = \sum_{j=1}^{6} \left(\frac{\partial a_1}{\partial \alpha_j} \frac{\partial a_i}{\partial \beta_j} - \frac{\partial a_1}{\partial \beta_j} \frac{\partial a_i}{\partial \alpha_j} \right)$$

$a = a_1$; a ஆனது α_1ல் மட்டுமே சார்பு. எனவே

$$\frac{\partial a}{\partial \alpha_j} = 0 , j = 2, 3 ; \quad \frac{\partial a}{\partial \beta_j} = 0 , j = 1, 2 , 3.$$

$$\text{மேலும்} \quad \frac{\partial a}{\partial \alpha_1} = \frac{\mu}{2 \alpha_1^2}$$

$$\text{எனவே} \{ a_1 , a_i \} = \frac{\partial a}{\partial \alpha_1} \frac{\partial a_i}{\partial \beta_1} = \frac{\mu}{2\alpha_1^2} \frac{\partial a_i}{\partial \beta_1}$$

a_i களில் β ஆனது a_6 ஆகிய ϵ ல்தான் வருகிறது. மேலும்

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial \beta_1} = - \frac{(-2\alpha_1)^{3/2}}{\mu} \quad \text{எனவே}$$

$$\{ a , \epsilon \} = - \frac{\mu}{2\alpha_1^2} \frac{(-2\alpha_1)^{3/2}}{\mu}$$

$$= \frac{\sqrt{-2 \alpha_1}}{\alpha_1} = - \sqrt{\frac{\mu}{a}} \cdot \frac{2 a}{\mu} = -2 \sqrt{\frac{a}{\mu}}$$

(ii) $$\{a_2, a_i\} = \sum_{j=1}^{6}\left(\frac{\partial a_2}{\partial \alpha_j}\frac{\partial a_i}{\partial \beta_j} - \frac{\partial a_2}{\partial \beta_j}\frac{\partial a_i}{\partial \alpha_j}\right)$$

$a_2 = e$ ல் βக்கள் இல்லை. மேலும் e ல் α_3 யும் இல்லை. எனவே

$$\{e, a_i\} = \frac{\partial e}{\partial \alpha_1}\frac{\partial a_i}{\partial \beta_1} + \frac{\partial e}{\partial \alpha_2}\frac{\partial a_i}{\partial \beta_2}$$

a_i களில் a_6 மட்டுமே β_1 ன் சார்பானது. மேலும்

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial \beta_1} = -\frac{(-2\alpha_1)^{3/2}}{\mu}\,.\ \frac{\partial a_5}{\partial \beta_2} = \frac{\partial \overline{\omega}}{\partial \beta_2} = -1,$$

$$\frac{\partial a_6}{\partial \beta_2} = \frac{\partial \epsilon}{\partial \beta_2} = -1$$

எனவே $\{e, \overline{\omega}\} = \{e, a_5\} = \dfrac{\partial e}{\partial \alpha_2}\dfrac{\partial a_5}{\partial \beta_2} = \dfrac{1-e^2}{e\sqrt{\mu a(1-e^2)}}$

$$= \frac{\sqrt{1-e^2}}{e}\frac{1}{\sqrt{\mu a}}$$

$$\{e, \epsilon\} = \{e, a_6\} = \frac{\partial e}{\partial \alpha_1}\frac{\partial a_6}{\partial \beta_1} + \frac{\partial e}{\partial \alpha_2}\frac{\partial a_6}{\partial \beta_2}$$

$$= \frac{2\mu a(1-e^2)}{2e\mu^2}\left[-\frac{1}{\mu}\left(\frac{\mu}{a}\right)^{3/2}\right] + \frac{1-e^2}{e\sqrt{\mu a(1-e^2)}}$$

$$= -\frac{1-e^2}{e\sqrt{\mu a}} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{e\sqrt{\mu a}}$$

$$= \frac{\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{\mu a}}\left[\frac{1-\sqrt{1-e^2}}{e}\right]$$

(iii) $$\{a_3, a_i\} = \sum_{j=1}^{6}\left(\frac{\partial a_3}{\partial \alpha_j}\frac{\partial a_i}{\partial \beta_j} - \frac{\partial a_3}{\partial \beta_j}\frac{\partial a_i}{\partial \alpha_j}\right)$$

$a_3 = i$ ஆனது α_2. α_3 ல் மட்டுமே சார்பு. எனவே

$$\{i, a_i\} = \frac{\partial i}{\partial \alpha_2}\frac{\partial a_i}{\partial \beta_2} + \frac{\partial i}{\partial \alpha_3}\frac{\partial a_i}{\partial \beta_3}$$

Ω ஆனது β_3 ல் மட்டும் சார்பு, $\dfrac{\partial \Omega}{\partial \beta_3} = -1$ என்பதால்

$$\{i, \Omega\} = \frac{\partial i}{\partial \alpha_3}\frac{\partial \Omega}{\partial \beta_3} = \left(-\frac{1}{\sin i, \alpha_2}\right)\left(-1\right) = \frac{1}{\sqrt{\mu a(1-e^2)}\sin i}$$

$\overline{\omega}$ ஆனது β_2, β_3 இரண்டிலும் சார்பு, மேலும் $\dfrac{\partial \overline{\omega}}{\partial \beta_2} = \dfrac{\partial \overline{\omega}}{\partial \beta_3} = -1.$

எனவே $\{i, \overline{\omega}\} = \frac{\partial i}{\partial \alpha_2}\frac{\partial \overline{\omega}}{\partial \beta_2} + \frac{\partial i}{\partial \alpha_3}\frac{\partial \overline{\omega}}{\partial \beta_3} = -\left[\frac{\partial i}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial i}{\partial \alpha_3}\right]$

$$= \frac{-\cot i}{\sqrt{\mu a(1-e^2)}} + \frac{1}{\sin i\sqrt{\mu a(1-e^2)}} = \frac{\tan\frac{i}{2}}{\sqrt{\mu a(1-e^2)}}$$

ϵ-ம் $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ ல் சார்பு. மேலும் $\frac{\partial \epsilon}{\partial \beta_2} = \frac{\partial \epsilon}{\partial \beta_3} = -1$ என்பதால்,

$$\{i, \epsilon\} = \frac{\partial i}{\partial \alpha_2}(-1) + \frac{\partial i}{\partial \alpha_3}(-1)$$

$$= -\left\{\frac{\partial i}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial i}{\partial \alpha_3}\right\} = \frac{\tan\frac{i}{2}}{\sqrt{\mu a(1-e^2)}}.$$

இவ்விதம் ஆறு பாயிசான் அடைப்புகளைக் கணக்கிட்டுள்ளோம்.

$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ என்ற ஆறு சார்புகளில்,

$\{a_i, a_i\} = 0, i = 1, 2, 3, 4, 5, 6,$

$\{a_i\, a_j\} = -\{a_j, a_i\}, i, j, = 1, 2, \ldots\ldots, 6, i \neq j$

என்பதால், மொத்தம் $^6C_2 = 15$ பாயிசான் அடைப்புகளே கண்டு பிடிக்கப்பட:வேண்டியவை. மேலும் a_1, a_2, a_3 என்பன $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ல் மட்டுமே சார்புகள், a_4, a_5, a_6 என்பன $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ ல் மட்டுமே சார்புகள். இதனால் இந்தப் பதினைந்திலும் $\{a_1, a_2\}, \{a_5, a_6\}$ போன்ற ஆறு பாயிசான் அடைப்புகள் பூச்சியமாகின்றன. இங்கு இன்னமும் சிறப்பாக $\{a_1, a_4\}, \{a_1, a_5\}, \{a_2, a_4\}$ ஆகியவையும் பூச்சியம். எனவே ஆறு பாயிசான் அடைப்புகளைத்தான் கணக்கிட வேண்டும். இவற்றையே மேலே கண்டுபிடித்தோம். இவற்றின் மதிப்பைத் தொகுத்து அடியில் தருவோம்:

$$\{a, \epsilon\} = -2\sqrt{\frac{a}{\mu}} \qquad \{i, \Omega\} = \frac{1}{\sqrt{\mu a}\sin i\cos\phi}$$

$$\{e, \overline{\omega}\} = \frac{\cot\phi}{\sqrt{\mu a}} \qquad \{i, \overline{\omega}\} = \{i, \epsilon\} \tag{33}$$

$$\{e, \epsilon\} = \frac{\tan\frac{\phi}{2}\cos\phi}{\sqrt{\mu a}} \qquad = \frac{\tan\frac{i}{2}}{\sqrt{\mu a}\cos\phi}$$

இங்கு $e = \sin\phi$ என்று இட்டுச் சுருக்கியிருப்பதைக் கவனிக்க,

இப்போது (33)-இல் கண்ட மதிப்புகளை (32)-இல் பிரதியிட்டு, பின்வரும் சமன்பாடுகளைப் பெறலாம்.

$$\frac{da}{dt} = 2\sqrt{\frac{a}{\mu}}\,\frac{\partial R}{\partial \epsilon}$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{-\cot\phi}{\sqrt{\mu a}}\frac{\partial R}{\partial \tilde{\omega}} - \frac{\tan\frac{\phi}{2}\cos\phi}{\sqrt{\mu a}}\frac{\partial R}{\partial \epsilon}$$

$$\frac{di}{dt} = -\frac{1}{\sqrt{\mu a}\sin i\cos\phi}\frac{\partial R}{\partial \Omega} - \frac{\tan\frac{i}{2}}{\sqrt{\mu a}\cos\phi}\left(\frac{\partial R}{\partial \tilde{\omega}} + \frac{\partial R}{\partial \epsilon}\right)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{\sqrt{\mu a}\sin i\cos\phi}\frac{\partial R}{\partial i} \qquad (34)$$

$$\frac{d\tilde{\omega}}{dt} = \frac{\cot\phi}{\sqrt{\mu a}}\frac{\partial R}{\partial e} + \frac{\tan\frac{i}{2}}{\sqrt{\mu a}\cos\phi}\frac{\partial R}{\partial i}$$

$$\frac{d\epsilon}{dt} = -2\sqrt{\frac{a}{\mu}}\frac{\partial R}{\partial a} + \frac{\tan\frac{\phi}{2}\cos\phi}{\sqrt{\mu a}}\frac{\partial R}{\partial e} + \frac{\tan\frac{i}{2}}{\sqrt{\mu a}\cos\phi}\frac{\partial R}{\partial i}$$

இவையே லாகிலாஞ்சு கிரக இயக்கச் சமன்பாடுகள் Lagrange's planetary equations) எனப்படும்.

7·5 அசைக்கும் சார்பின் வடிவம் பற்றிப் பின்னல் (7.8)-இல் விவரிக்கப்போகிறோம், இவ்வடிவம் $(nt+\epsilon)$ல் சைன், கொசைன் ஆகியவற்றைக் கொண்டுள்ளது. n என்பது சராசரி இயக்கம். $n^2 a^3 = \mu$ என்பதால், a ஆனது மாறும்போது n-உம் மாற்றம் பெறும். இதனல் $\frac{\partial R}{\partial a}$ ஐக் கணக்கிடுகையில் சில உறுப்புகளுக்கு t ஆனது ஒரு காரணியாக அமைகிறது. t என்பது வளரும் சார்பு (secular term). ஆகையால் இத்தகைய உறுப்புகளைத் தவிர்ப்பது சௌகரிய மாக இருக்கும். இதற்கு ஒரு வழி கண்டுபிடிக்கப்பட்டிருக்கிறது; அதனை அடியில் விவரிப்போம்.

Rல் ϵ ஆனது $nt+\epsilon$ என்ற வடிவில் மட்டுமே சைன், கொசைன் களுக்குள் வரும். n ஆனது Rல் வெளிப்படையாக சைன், கொசைன்களுக்குள் வரும். n ஆனது R ல் வெளிப்படையாக சைன், கொசைன்களுக்குள் மட்டுமே வருவதாகக் கொள்க.

இவற்றிற்கு வெளியில் n வராது. அப்படி வெளியில் n வந்திருந்தால் அதனை aன் சார்பாக $\sqrt{\mu}a^{-3/2}$ என்று கருதுக. இந்நிலையில்

$$\left(\frac{\partial R}{\partial n}\right)_{a=\text{மாறிலி}} = t\,\frac{\partial R}{\partial \epsilon}$$

ஆகவே (34)ல் கடைசிச் சமன்பாடு

$$\frac{d\epsilon}{dt} = -2\sqrt{\frac{a}{\mu}}\,\frac{\partial R}{\partial a} + \text{இன்னும் இரு உறுப்புகள்}$$

$$= -2\sqrt{\frac{a}{\mu}}\left\{\left(\frac{\partial R}{\partial a}\right)_{n=\text{மாறிலி}} + \left(\frac{\partial R}{\partial n}\right)_{a=\text{மாறிலி}}\frac{dn}{da}\right\} + \text{இரு உறுப்புகள்}$$

$$= -2\sqrt{\frac{a}{\mu}}\left\{\left(\frac{\partial R}{\partial a}\right)_{n=\text{மாறிலி}} + t\,\frac{\partial R}{\partial \epsilon}\,\frac{dn}{da}\right\} + \cdots$$

$$= -2\sqrt{\frac{a}{\mu}}\left(\frac{\partial R}{\partial a}\right)_{n=\text{மாறிலி}} - 2\sqrt{\frac{a}{\mu}}\,\frac{\partial R}{\partial \epsilon}\,t\,\frac{dn}{da} + \cdots$$

இப்போது (34)-இல் முதல் சமன்பாட்டின்படி $2\sqrt{\frac{a}{\mu}}\,\frac{\partial R}{\partial \epsilon} = \frac{da}{dt}$

எனவே $$\frac{d\epsilon}{dt} = -2\sqrt{\frac{a}{\mu}}\left(\frac{\partial R}{\partial a}\right)_{n=\text{மாறிலி}} - \frac{da}{dt}\,t\,\frac{dn}{da} + \cdots$$

$$= -2\sqrt{\frac{a}{\mu}}\left(\frac{\partial R}{\partial a}\right)_{n=\text{மாறிலி}} - t\,\frac{dn}{dt} + \cdots$$

இதனால்

$$\frac{d\epsilon}{dt} + t\,\frac{dn}{dt} = -2\sqrt{\frac{a}{\mu}}\left(\frac{\partial R}{\partial a}\right)_{n=\text{மாறிலி}} + \text{இன்னும்}$$

இரு உறுப்புகள்

இப்போது ϵ' என்ற ஒரு மூலகத்தை

$$\frac{d\epsilon'}{dt} = \frac{d\epsilon}{dt} + t\,\frac{dn}{dt}$$

என்ற சமன்பாட்டின்படி வரையறுக்க. இதனால்

$$\epsilon' = \epsilon + \int t dn$$
$$= \epsilon + t n - \int n dt$$

அதாவது $\epsilon' + \int ndt = nt + \epsilon$. எனவே $\frac{\partial R}{\partial \epsilon} = \frac{\partial R}{\partial \epsilon'}$ இதனால் (34)இல் உள்ள சமன்பாடுகளின் வடிவங்கள், a, e, i, Ω $\bar{\omega}'$ ϵ' ஆகிய வற்றை மூலகங்களாகக் கொண்டபோதும் நிலைத்திருக்கின்றன. ஆனால் அவற்றின் பொருள் மாறியுள்ளது என்பதைக் கவனிக்க வேண்டும். அதாவது, சராசரி நெறிப் பிறழ்ச்சியில் n ஆனது, $\frac{\partial R}{\partial a}$ ஐக் கண்டுபிடிக்கும்போது மாறிலியாகக் கொள்ளப்பட வேண்டும். மேலும் M ஆனது $nt + \epsilon'$ அல்ல, $\int n dt + \epsilon$ என்பதையும் கவனிக்க வேண்டும், $\int n dt$ ஐ ρ என்று குறிப் பிட்டால்,

$$\rho = \int_0^t n\, dt = \int_0^t \sqrt{\mu}\, a^{-\frac{3}{2}} dt$$

எனவே $\frac{d\rho}{dt} = \sqrt{\mu}\, a^{-\frac{3}{2}}$.

$$\therefore \quad \frac{d^2\rho}{dt^2} = \sqrt{\mu}\left(-\frac{3}{2} a^{-\frac{5}{2}} \frac{da}{dt}\right)$$

$$= -3 \sqrt{\mu}\, a^{-\frac{5}{2}} \sqrt{\frac{a}{\mu}} \frac{\partial R}{\partial \epsilon'} = -\frac{3}{a^2} \frac{\partial R}{\partial \epsilon'}$$

$$\therefore \quad \rho = -3 \iint \frac{1}{a^2} \frac{\partial R}{\partial \epsilon'} dt\, dt$$

7·6 இதுவரை, மூலகங்களின் மாற்றங்களை, அசைக்கும் சார்பின் கெழுக்களின் மூலம் காணும் விதத்தை விவரித்தோம். அடுத்த படியாக, இம் மாற்றங்களை, நேரடியாக, அம் மாற்றங்களுக்குக் காரணமாயுள்ள விசைகளைக் கொண்டு எழுதும் வகையினை விளக்குவோம்.

பாதையொன்றில் செல்லும் P எனும் கிரகத்தின் மீது தாக்கும் விசையினை, O எனும் சூரியனை மையமாகக்கொண்டு, S, T, W'

என்று மூன்று கூறுகளாகப் பிரித்துக் கொள்க. S என்பது சூரியனிலிருந்து கிரகத்தை நோக்கியது. T என்பது பாதைத் தளத்தில் இதற்குச் செங்குத்தானது. W' என்பது பாதைத்தளத்திற்குச் செங்குத்தாக உள்ளது. 5·11·இல் குறிப்பிட்ட அணிகளை B, C ஐக் கொண்டு, (X, Y, Z), (X_2, Y_2, Z_2)க் கிடையே $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = CB \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix}$

என்ற மாற்றம் செய்யலாம். இதனால் r தூரத்திலுள்ள கிரகத்தின் குறுக்குக் கோட்டுக் கோண வீச்சம் u எனில், P ன் கூறுகள் $X_2 = r\cos u$, $Y_2 = r\sin u$, $Z_2 = 0$. எனவே அதன் பரிதிமையத் தோற்றப் பாதைக் கூறுகள்

$$X = r(\cos u \cos\Omega - \sin u \sin\Omega \cos i)$$
$$Y = r(\cos u \sin\Omega + \sin u \cos\Omega \cos i)$$
$$Z = r\sin u \sin i$$

ஆகும். எனவே OP ன் அலகு வெக்டரை

$$\hat{\mathbf{r}} = \lambda\,\mathbf{i} + \mu\,\mathbf{j} + \gamma\,\mathbf{k}$$

என்று கொண்டால்,

$$\lambda = \cos u \cos\Omega - \sin u \sin\Omega \cos i$$
$$\mu = \cos u \sin\Omega + \sin u \cos\Omega \cos i$$
$$\gamma = \sin u \sin i$$

ஆகும். இவையே OP ன் திசைக் கொசைன்கள். T ன் திசைக் கொசைன்கள் $\frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial u}$ ன் கூறுகளாகும்; அதாவது $\frac{\partial \lambda}{\partial u}, \frac{\partial \mu}{\partial u}, \frac{\partial \gamma}{\partial u}$ ஆகும். W' ன் திசை இவ்விரண்டுக்கும் செங்குத்து என்பதால், அதன் திசைக் கொசைன்கள் $\hat{\mathbf{r}} \times \frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial u}$ ன் கூறுகளாகும்; இவற்றைச் சுருக்கினால்

$$\frac{1}{\sin u}\frac{\partial \lambda}{\partial i}, \frac{1}{\sin u}\frac{\partial \mu}{\partial i}, \frac{1}{\sin u}\frac{\partial \gamma}{\partial i}$$

என்று கிடைக்கும்.

S, T, W' என்பன ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்துக் கோடுகள் என்பதால்

$$\sum \lambda \frac{\partial \lambda}{\partial u} = 0, \sum \lambda \frac{\partial \lambda}{\partial i} = 0, \sum \frac{\partial \lambda}{\partial u}\cdot\frac{\partial \lambda}{\partial i} = 0$$

$-R$ என்பது அசைக்கும் விசைத்தேக்கம் என்பதால், X, Y, Z திசையில் மொத்த விசைகள் முறையே $\frac{\partial R}{\partial X}, \frac{\partial R}{\partial Y}, \frac{\partial R}{\partial Z}$. இவற்றிற்கும் S, T, W'க்கு முள்ள சம்பந்தங்கள்

$$\frac{\partial R}{\partial X} = \lambda S + \frac{\partial \lambda}{\partial u} T + \frac{1}{\sin u} \frac{\partial \lambda}{\partial i} W'$$

$$\frac{\partial R}{\partial Y} = \mu S + \frac{\partial \mu}{\partial u} T + \frac{1}{\sin u} \frac{\partial \mu}{\partial i} W'$$

$$\frac{\partial R}{\partial Z} = \gamma S + \frac{\partial \gamma}{\partial u} T + \frac{1}{\sin u} \frac{\partial \gamma}{\partial i} W'$$

இப்போது $\frac{\partial R}{\partial a} = \frac{\partial R}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial a} + \frac{\partial R}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial a} + \frac{\partial R}{\partial Z}\frac{\partial Z}{\partial a}$

$$= \left(\lambda S + \frac{\partial \lambda}{\partial u} T + \frac{1}{\sin u} \frac{\partial \lambda}{\partial i} W'\right) \frac{\partial (\lambda r)}{\partial a}$$

$$+ \left(\mu S + \frac{\partial \mu}{\partial u} T + \frac{1}{\sin u} \frac{\partial \mu}{\partial i} W'\right) \frac{\partial (\mu r)}{\partial a}$$

$$+ \left(\gamma S + \frac{\partial \gamma}{\partial u} T + \frac{1}{\sin u} \frac{\partial \gamma}{\partial i} W'\right) \frac{\partial (\gamma r)}{\partial a}$$

$$= \left(\lambda S + \frac{\partial \lambda}{\partial u} T + \frac{1}{\sin u} \frac{\partial \lambda}{\partial i} W'\right) \left(\lambda \frac{\partial r}{\partial a} + r \frac{\partial \lambda}{\partial a}\right)$$

+ இன்னும் இரு உறுப்புகள்

$$= \left\{ S(\lambda^2+\mu^2+\gamma^2)\frac{\partial r}{\partial a} + S r \left(\lambda \frac{\partial \lambda}{\partial u} + \mu \frac{\partial \mu}{\partial u} + \gamma \frac{\partial \gamma}{\partial u}\right) \frac{\partial u}{\partial a}\right\}$$

+ இன்னும் இரு உறுப்புகள்

$$= S \frac{\partial r}{\partial a} + r T \left(\frac{\partial \lambda}{\partial u}\frac{\partial \lambda}{\partial a} + \frac{\partial \mu}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial a} + \frac{\partial \gamma}{\partial u} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial a}\right)$$

$$+ \frac{r W'}{\sin u} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial i}\frac{\partial \lambda}{\partial a} + \frac{\partial \mu}{\partial i}\frac{\partial i}{\partial a} + \frac{\partial \gamma}{\partial i}\frac{\partial i}{\partial a}\right)$$

இப்போது $r = a(1-e\cos E)$, $E - e\sin E = nt + \epsilon - \varpi$,

$$\tan \frac{w}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2}, \quad u = \varpi - \Omega + w$$

என்பதால், $\frac{\partial r}{\partial a} = 1 - e \cos E = \frac{r}{a}$ • மேலும் λ, μ, γல் a இல்லாததால், T. W' ஆகியவற்றின் குணகங்கள் பூச்சியம். எனவே $\frac{\partial R}{\partial a} = S\frac{r}{a}$ • இவ்விதமே மூலகங்களைப் பொறுத்து Rன் மற்ற பகுதி வகைக் கெழுக்களையும் கண்டுபிடித்து, அடியிற் கண்ட சமன்பாடுகளைப் பெறலாம் :

$$\frac{\partial R}{\partial a} = \frac{Sr}{a}$$

$$\frac{\partial R}{\partial i} = \frac{rW'}{\sin u} \sum \left(\frac{\partial \lambda}{\partial i} \right)^2 = r W' \sin u$$

$$\frac{\partial R}{\partial \Omega} = -2 r T \sin^2 \frac{i}{2} - r W' \cos u \sin i \qquad (35)$$

$$\frac{\partial R}{\partial \epsilon} = S a \tan \phi \sin w + T a \sec \phi (1 + e \cos w)$$

$$\frac{\partial R}{\partial \bar{\omega}} = r T - \frac{\partial R}{\partial \epsilon}$$

$$\frac{\partial R}{\partial e} = -a S \cos w + r T \sin w (2 + e \cos w) \sec^2 \phi$$

இப்போது (35)-ஆம் சமன்பாடுகளிலிருந்து (34)-ஆம் சமன்பாடுகளில் பிரதி யீடு செய்தால், மூல மாறு வேகங்கள் S, T, W'ன் சார்புகளாகப் பெறப்படும். இவையாவன :

$$\frac{da}{dt} = 2\sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \left[S \tan \phi \sin w + T \sec \phi (1 + e \cos w) \right]$$

$$\frac{de}{dt} = \sqrt{\frac{a}{\mu}} \cos \phi \left[S \sin w + T (\cos w + \cos E) \right]$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{rW' \cos u}{\cos \phi \sqrt{\mu a}}$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{r W' \sin u}{\sqrt{\mu a} \cos \phi \sin i} \qquad (36)$$

$$\frac{d\bar{\omega}}{dt} = \frac{-a S \cos^2 \phi \cos w + r T \sin w (2 + e \cos w) + r W' \sin \phi \tan \frac{i}{2} \sin u}{\sqrt{\mu a} \sin \phi \cos \phi}$$

$$\frac{d\epsilon}{dt} = -\frac{2 r S}{\sqrt{\mu a}} + 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} \phi \frac{d\bar{\omega}}{dt} + 2 \cos \phi \sin^2 \tfrac{1}{2} i \frac{d\Omega}{dt}$$

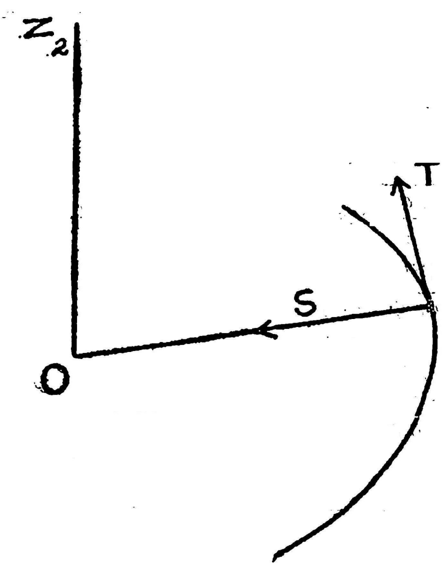
7.7 ஒரு கிரகத்தின் மீது தாக்கும் விசைகள் S, T, W' ஆகியவை, ஒரு விசைச் தேக்கச் சார்பிலிருந்து பெறப்படுகின்றன என்று மேற்கொண்டு (36)-ஆம் சமன்பாடுகள் தருவிக்கப்பட்டன. இச்சமன்பாடுகளைப் பொதுவான (விசைத் தேக்கத்திலிருந்து பெற முடியாத) விசைகளுக்கும் வரவழைக்க முடியும் என்று இப்போது காட்டுவோம்.

X, Y, Z என்பன, கிரகத்தின் மீது தாக்கும் அசைக்கும் விசையின் கூறுகள் எனில், சமன்பாடுகள் (6), (7), (8)ஐ முறையே

$$\ddot{x} = -\frac{\mu x}{r^3} + X, \qquad \ddot{y} = -\frac{\mu y}{r^3} + Y, \qquad \ddot{z} = -\frac{\mu z}{r^3} + Z$$

என்று எழுதலாம். அசைக்கும் விசையின் கூறுகள் 7.6ல் குறிப்பிட்டபடி S, T, W' என்று கொள்க. ஒவ்வொரு அசைக்கும் விசைக் கூறினாலும் மூலகங்களில் ஏற்படும் மாற்றங்களைக் கணக்கிட்டுக் கூட்டி விடையைப் பெறுவோம்.

S, T, ஆகியவை δt என்ற மிகச் சிறிய கால அளவில் கிரகத்தின் பாதையில் என்ன மாற்றங்களைச் செய்யும் என்பதை முதலில் ஆராய்வோம். S ஆனது மைய விசைக்கூறு. எனவே இது h ஐ மாற்றுது ; ஆனால் Tயினால் h ல் மாற்றம் ஏற்படும். நியூட்டனின் இயக்கக்கொள்கைப்படி, 5·11ல் குறிப்பிட்ட OZ_2 ஐச் சுற்றித் திருப்புத்திறன் எடுக்க,



படம் 7·2

சுழல் உந்தகத்தில் மாற்றம்

$= T$க்கு OZ_2 ஐச் சுற்றிய திருப்புத்திறன்

$\therefore\ \delta h = rT\,\delta t.$ ஆனால் $\delta\,(h^2) = \delta\,\{\mu a\,(1-e^2)\}$

$= \mu\ (1-e^2)\ \delta a - 2\ \mu ae\ \delta e.$

எனவே $\mu\,(1-e^2)\ \delta a - 2\ \mu ae\ \delta e = 2\ hrT\ \delta t$ (37)

நீள் வளையப் பாதையில் கிரகத்தின் மொத்த சக்தி $-\dfrac{\mu}{2a}$ $S,\ T$ என்பன தாக்குவதன் விளைவாகக் கிரகத்தின் சக்தியில் ஏற்படும் மாற்றம் $\delta\left(-\dfrac{\mu}{2a}\right)$. இயக்கச் சக்தியில் ஏற்படும் மாற்றங்களின் விளைவாக ஏற்படும் இம் மாற்றம், $S,\ T$ ஆகியவை செய்யும் வேலைக்குச் சமம். எனவே

$$\frac{\mu}{2a^2}\,\delta a = Sdr + Trd\,\theta$$

$$= (S\dot{r} + Tr\,\dot{\theta})\ \delta t$$

ஆனால் $r = \dfrac{h^2/\mu}{1+e\cos w}$ என்பதால்,

$$\dot{r} = \frac{(h^2/\mu)\ e\sin w\ \dot{w}}{(1+e\cos w)^2} = \left(\frac{h^2/\mu}{1+e\cos w}\right)^2 = \frac{\mu e\sin w\ \dot{w}}{h^2}$$

$$= \frac{h\,\mu\ e\sin w}{h^2} = \frac{\mu\ e\sin w}{h}$$

மேலும் $r^2\,\dot{\theta} = h$ என்பதால் $r\dot{\theta} = \dfrac{h}{r}$

எனவே $\dfrac{\mu}{2a^2}\,\delta a = \left(S\,\dfrac{\mu\,e\sin w}{h} + \dfrac{Th}{r}\right)\delta t$ (38)

இதனையும் (37) ஐயும் தீர்த்து δt ஆல் வகுத்து எல்லை எடுத்தால் நாம் பெறுவது

$$\frac{da}{dt} = \frac{2a^2}{\mu}\left[\frac{S\,\mu\ e\sin w}{h} + \frac{Th}{r}\right]$$

$$= 2\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}\left[\ S\tan\phi\sin w + T\sec\phi\ (1+e\cos w)\ \right] \qquad (39)$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{S\,a\,(1-e^2)\sin w}{h} + \frac{T\left[\frac{h}{r}(1-e^2)a^2 - hr\right]}{\mu ae}$$

$$= \frac{S\,a\,(1-e^2)\sin w}{\sqrt{\mu a\,(1-e^2)}} + \frac{T\,[ha\,(1+e\cos w) - ha\,(1-e\cos E)}{\mu ae}$$

$$= S\sqrt{\frac{a}{\mu}}\sqrt{1-e^2}\sin w + T\sqrt{\frac{a}{\mu}}\sqrt{1-e^2}\,(\cos w + \cos E)$$

எனவே $\frac{de}{dt} = \sqrt{\frac{a}{\mu}}\cos\phi\left[S\sin w + T(\cos w + \cos E)\right]$ (40)

இங்கு, வழக்கப்படி, $e = \sin\phi$ என்று எழுதப்பட்டுள்ளது.

S, T ஆகியவை சுற்றுப்பாதைத் தளத்தில் தாக்கும் விசைகள் எனவே i, Ω இவற்றல் மாருதவை. ஆனல்

$$r = \frac{h^2/\mu}{1+e\cos(u-w)} \tag{41}$$

என்பதால், u w ஆகிய மூலகங்களிலும், அதனல் $\overline{\omega}$ லும் மாற்றங்கள் ஏற்படும். (41)-இலிருந்து வகைப்படுத்த,

$$2h\dot{h} = \mu\dot{r}\,[1+e\cos w] - \mu\,r\,e\sin w\,(\dot{u} - \dot{\omega}) + \mu\,r\,\dot{e}\cos w$$

$r^2\dot{u} = h$ என்பதால்,

$$2\,h\,r\,T = \mu\cdot\frac{\mu e\ e\sin w}{h}(1+e\cos w) - \mu\,r\,e\sin w\left(\frac{h}{r^2} - \dot{\omega}\right)$$
$$+\mu\,r\,\dot{e}\cos w$$

$$\therefore\ \dot{e}\cos w + \dot{\omega}\,e\sin w = \frac{2hT}{\mu} + \frac{\mu\,e\sin w}{h\,r}\cdot\frac{h^2}{\mu r} - \frac{h\,e\sin w}{r^2}$$
$$= \frac{2hT}{\mu}$$

இதில் (40)-இலிருந்து $\dot{e}$ ன் மதிப்பைப் பிரதியிட,

$$\dot{\omega}\,e\sin w = -\sqrt{\frac{a}{\mu}}\cos\phi\left[S\sin w + T(\cos w + \cos E)\right]\cos w$$
$$+ 2\sqrt{\frac{a}{\mu}}\cos\phi\,T$$

$$\therefore \dot{\varpi} = -\sqrt{\frac{a}{\mu}} \cot\phi\, S \cos w$$

$$+ \frac{r\, T \sin w\, [\,2+e \cos w\,]}{\sin\phi \cos\phi \sqrt{\mu a}}$$

$\bar{\omega} = \Omega + \omega$, Ω மாறவில்லை, என்பதால் $\dot{\omega} = \dot{\bar{\omega}}$,

எனவே S, Tன் விளைவாக $\bar{\omega}$ல் மாற்றம்

$$\frac{d\bar{\omega}}{dt} = \frac{\cot\phi}{\sqrt{\mu a}} \left[-a S \cos w + r\, T \sec^2\phi \sin w\, (2 + e \cos w) \right] \quad (41)$$

அடுத்தபடியாக, $\frac{d\epsilon'}{dt}$ ஐக் கணக்கிடுவோம்.

$$\epsilon' + \int n\, dt = \bar{\omega} + M, \quad M = E - e \sin E$$

என்பதால் $\dot{\epsilon}' = \dot{\bar{\omega}} + \dot{M} - n$

$$= \dot{\bar{\omega}} + \dot{E} - e \cos E\, \dot{E} - \dot{e} \sin E - n \quad (42)$$

$r = a\,(1 - \cos E)$ என்பதிலிருந்து

$$\dot{r} = \dot{a}\ (1 - e \cos E) - a\, \dot{e} \cos E + a\, e \sin E\, \dot{E} \quad (43)$$

ஆனால் $\dot{r} = \frac{\mu\, e \sin w}{h} = \mu\, e \frac{\sqrt{1-e^2} \sin E}{r}$

$$= \frac{\mu\, e\, a \sqrt{1-e^2} \sin E}{\sqrt{\mu\, a\, (1-e^2)}\, a (1 - e \cos E)} = \frac{n\, a\, e \sin E}{1 - e \cos E}$$

($n^2 a^3 = \mu$ என்பதால்)

ஆகவே 43-இல் இதனைப் பிரதியிட,

$$\dot{a}\ (1 - e \cos E) - a\, \dot{e} \cos E + a\, e \sin E\, \dot{E} = \frac{n\, a\, e \sin E}{1 - e \cos E}$$

$$\therefore \dot{E} = -\frac{\dot{a}\,(-e \cos E)}{2\, e \sin E} + \frac{\cot E\, \dot{e}}{e} + \frac{n}{1 - e \cos E}$$

இதனை (42)-இல் பிரதியிட,

$$\frac{d e'}{d t} = \dot{\bar{\omega}} - \frac{\dot{a}\,(1 - e \cos E)^2}{a\, e \sin E} + \frac{\dot{e} \cot E}{e} (1 - e \cos E)$$

$$+ n - \dot{e} \sin E - n$$

$$= \dot{\varpi} - \frac{\dot{a}\,(1-e\cos E)\sqrt{1-e^2}}{a\,e\sin w} + \dot{e}\,\frac{\cos E - e}{e\sin E}$$

$$= \dot{\varpi} - \frac{\dot{a}\,(1-e\cos E)\sqrt{1-e^2}}{a\,e\sin w} + \dot{e}\,\frac{\cot w\sqrt{1-e^2}}{e}$$

இப்போது $\dot{a}$, $\dot{e}$, $\dot{\varpi}$ ஆகியவற்றிற்கு ஏற்கெனவே கண்டு பிடித்த கோவைகளைப் பயன்படுத்தினுல்

$$\frac{d\epsilon'}{dt} = -\frac{2rS}{\sqrt{\mu a}} + 2\sin^2\frac{\phi}{2}\frac{d\varpi}{dt} \qquad (44)$$

என்று கிடைக்கும்.

இதுவரை S, T ஆகியவற்ருல் a, e, ϖ, ϵ' ஆகியவற்றில் ஏற்படும் மாற்றங்களைக் கண்டோம். இனி W' ஞல் இவற்றிலும், i, Ω லும் மாற்றங்கள் ஏற்படுமா என்ருராய்வோம்.

W' ஆனது சுழல் உந்த வெக்டர் $\mathbf{h}$க்கு இணையாக இருப்பதால், $\mathbf{h}$-இன் மதிப்பில் இதனுல் மாற்றம் ஏற்படாது. ஆனுல் $\mathbf{h}$-இன் திசை மாறலாம். எனவே $\frac{d\mathbf{h}}{dt} = \mathbf{r}\times\mathbf{F}$ இங்கு $\mathbf{F}$ என்பது S, T, W' ஆகிய கூறுகளைக் கொண்ட வெக்டர் விசை, $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$.

$$\mathbf{F} = S\hat{\mathbf{r}} + T\hat{\mathbf{r}}\times\hat{\mathbf{h}} + W'\hat{\mathbf{h}}$$

என்று எழுதினுல், $\mathbf{h} = h\hat{\mathbf{h}}$ என்பதால்,

$$\frac{dh}{dt}\hat{\mathbf{h}} + h\frac{d\hat{\mathbf{h}}}{dt} = Tr\,\hat{\mathbf{h}} + W'r\,\hat{\mathbf{r}}\times\hat{\mathbf{h}}$$

அதாவது

$$\frac{\hat{\mathbf{h}}}{h}\frac{dh}{dt} + \frac{d\hat{\mathbf{h}}}{dt} = \frac{Tr\,\hat{\mathbf{h}}}{h} + \frac{W'r}{h}\hat{\mathbf{r}}\times\hat{\mathbf{h}}$$

$\hat{\mathbf{h}}$ ன் கூறுகளைச் சமப்படுத்தினுல் $\frac{dh}{dt} = Tr$ என்று கிடைக்கும். இது நாம் ஏற்கெனவே வருவித்ததே. W' ஞல் hல் மாற்றமில்லை என்பதும் இதனுல் உறுதியாகிறது. மேலும்

$$\frac{d\hat{\mathbf{h}}}{dt} = \frac{W'r}{h}\hat{\mathbf{r}}\times\hat{\mathbf{h}} \qquad (45)$$

என்றும் அறிகிருேம்.

$\hat{\mathbf{h}}$ என்பது OZ_2 திசையில் அலகு வெக்டர். எனவே 7·6 ன் படி,

$$\hat{\mathbf{h}} = \sin\Omega \sin i\, \mathbf{i} - \cos\Omega \sin i\, \mathbf{j} + \cos i\, \mathbf{k} \tag{46}$$

மேலும் $W'r\,\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{h}}$ என்பது W' க்கு O ஐச் சுற்றித் திருப்புத் திறன் வெக்டர். இது T ன் திசையில் இருக்கும். எனவே

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{h}} &= \frac{\partial\lambda}{\partial u}\mathbf{i} + \frac{\partial\mu}{\partial u}\mathbf{j} + \frac{\partial\nu}{\partial u}\mathbf{k}\\ &= (-\sin u\cos\Omega - \cos u \sin\Omega\cos i)\,\mathbf{i}\\ &\quad + (-\sin u \sin\Omega + \cos u\cos\Omega\cos i)\,\mathbf{j}\\ &\quad + \cos u \sin i\,\mathbf{k}\end{aligned} \tag{47}$$

(46) ல் $\hat{h}$ ஐ வகைப் படுத்தியதையும் (47) ஐ யும் 45 ல் பிரதியிட,

$$\left(\sin\Omega\cos i\,\frac{di}{dt} + \cos\Omega\sin i\,\frac{d\Omega}{dt}\right)\mathbf{i} + \left(-\cos\Omega\cos i\,\frac{di}{dt} + \sin\Omega\sin i\,\frac{d\Omega}{dt}\right)\mathbf{j} - \sin i\,\frac{di}{dt}\mathbf{k}$$

$$= \frac{W'r}{h}\Big\{(-\sin u\cos\Omega - \cos u\sin\Omega\cos i)\,\mathbf{i} + (-\sin u\sin\Omega + \cos u\cos\Omega\cos i)\,\mathbf{j} + \cos u\sin i\,\mathbf{k}\Big\}$$

இதனின்று $\mathbf{k}$ ன் குணகங்களைச் சமப்படுத்திப் பெறுவது

$$-\sin i\,\frac{di}{dt} = \cos u \sin i\,\frac{W'r}{h},$$

அதாவது $\displaystyle \frac{di}{dt} = -\frac{W'r\cos u}{\sqrt{\mu a}\cos\phi}$

i-ன் குணகங்களில் இதனைப் பிரதியிட்டுப் பெறுவது

$$\frac{d\Omega}{dt} = -\frac{W'r\sin u}{h\sin i}$$

குறியினைத்தவிர்த்து இதனால் நாமறிவது

$$\frac{di}{dt} = \frac{W'r\cos u}{\sqrt{\mu a}\cos\phi} \tag{48}$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{W'r\sin u}{\sqrt{\mu a}\sin i\cos\phi} \tag{49}$$

இனி W' ஆனது ஒரு கணத்தாக்கு விசை என்க. இதனால் கிரகத்தின் இருப்பிடம் மாறுவதில்லை. ஆயினும் சுற்றுப் பாதைத் தளம் மாறுகிறது. W' தாக்கும் நேரம் δt என்க. u இல் மாறுதல் δu என்க. a, r, e, w என்பன மாறுவதில்லை யாதலால், $\delta u = \delta\omega$. மேலும் கிரகத்தின் குறுங்கோட்டுக் கோணம் மாறுவதில்லை என்பதால் $\sin i \sin u = \sin\beta =$ மாறிலி.

$$\therefore \quad \sin i \cos u \, du + \cos i \sin u \, di = 0$$

$$\therefore \quad du = -\cot i \tan u \, d i$$

அதாவது $\dfrac{d\omega}{dt} = -\cot i \tan u \dfrac{di}{dt}$

$\dot{\varpi} = \dot{\omega} + \dot{\Omega}$ என்பதால்

$$\dot{\varpi} = \frac{r W' \sin u}{\sqrt{\mu a} \cos\phi \sin i} - \frac{\sin u}{\cos u} \frac{\cos i}{\sin i} \frac{r W' \cos u}{\cos\phi \sqrt{\mu a}}$$

$$= \frac{r W' \sin u}{\sqrt{\mu a} \cos\phi} \tan \frac{i}{2}$$

அடுத்தபடியாக, $d\epsilon' + ndt - d\omega = dM$

ஆனால், கணத்தாக்குதலில் a, e, r, w, M அனைத்தும் நிலையானவை. எனவே $dM = 0$. மேலும் $\delta t \to 0$ எனில் $ndt \to 0$. இதனால்

$\dfrac{d\epsilon'}{dt} = \dfrac{d\varpi}{dt}$. எனவே மொத்தத்தில்

$\dfrac{d\varpi}{dt} =$ (S, T ஆல் ஏற்பட்ட மாற்றம்) + [W' ஆல் ஏற்பட்ட மாற்றம்]

$$= \frac{\cot\phi}{\sqrt{\mu a}} \left[- a S \cos w + r T \sec^2\phi \sin w (2 + e \cos w) \right.$$
$$\left. + \frac{r W' \sin u \tan \frac{i}{2}}{\sqrt{\mu a} \cos\phi} \right.$$

$$= \frac{- aS \cos^2\phi \cos w + r T \sin w (2 + e \cos w) + r W' \sin\phi \tan \frac{i}{2} \sin u}{\sqrt{\mu a} \sin\phi \cos\phi} \qquad (50)$$

$$\frac{d\epsilon'}{dt} = (S, T \text{ ஆல் ஏற்பட்ட மாற்றம்}) + (W' \text{ ஆல் ஏற்பட்ட மாற்றம்})$$

$$= \frac{-2rS}{\sqrt{\mu a}} + 2\sin^2\frac{\phi}{2}\frac{\cot\phi}{\sqrt{\mu a}}\Big[-aS\cos w + rT\sec^2\phi\sin w\,(2+e\cos w)\Big] + \frac{rW'\sin u\tan\frac{i}{2}}{\sqrt{\mu a}\cos\phi}$$

$$= \frac{-2rS}{\sqrt{\mu a}} + 2\sin^2\frac{\phi}{2}\frac{d\varpi}{dt} + 2\cos\phi\sin^2\frac{i}{2}\frac{d\Omega}{dt} \qquad (51)$$

சமன்பாடுகள் 39, 40, 48, 49, 50, 51 என்பன, (36) ஆம் சமன் பாடுகளே என்பதைக் கவனிக்க.

7·8 அசைக்கும் சார்பு

லாகிராஞ்சு கிரக இயக்கச் சமன்பாடுகளில் வலப்புறம் அசைக்கும் சார்பின் பகுதி வகைக் கெழுக்கள் வருகின்றன. இச் சமன்பாடுகளைத் தொகைப் படுத்த வேண்டுமாயின், R ன் வடிவம் நமக்குத் தெரிய வேண்டும். கிரக இயக்கத்தில் R ன் பொது வடிவத்தை இனி ஆராய்வோம்.

(10) ம் சமன்பாட்டில் $R = k^2 \sum_{i=2}^{n-2} m_i \left[\frac{1}{\Delta_i} - \frac{xx_i + yy_i + zz_i}{\rho_i^3}\right]$

என்று பார்த்தோம். m என்ற ஒரு கிரகத்தினை அசைக்கும் கிரகம் m_1 என்ற ஒன்றேயொன்று மட்டும் என்று கொள்க. அப்போது

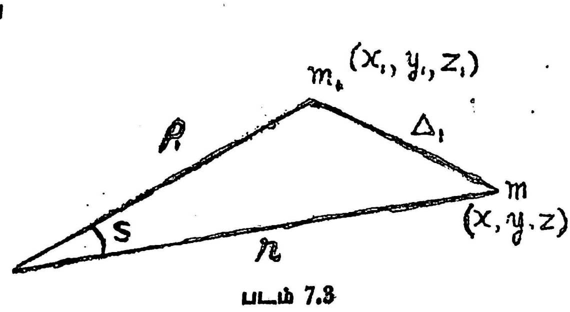
$$R = k^2 m_1 \left[\frac{1}{\Delta_1} - \frac{xx_1 + yy_1 + zz_1}{\rho_1^3}\right]$$

இங்கு $\Delta_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$

$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$

$\rho_1^2 = (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2$

m, m_1 ஆகியவை சூரியனில் தாங்கிடும் கோணத்தினை S என்க. அப்போது



படம் 7.3

$$xx_1 + yy_1 + zz_1 = \rho_1 \, r \cos S$$

எனவே $R = k^2 m_1 \left[\dfrac{1}{\triangle_1} - \dfrac{r \cos S}{\rho_1^2} \right]$

மேலும் $r^2 = \rho_1^2 - 2 \, r \, \rho_1 \cos S = \triangle_1^2$

முதலில் m, m_1 இரண்டுமே S ஐச் சுற்றி ஒரே தளத்தில் வட்டப் பாதையில் செல்வதாகக் கொள்க. இவற்றின் ஆரங்கள் a, a_1 என்க. $a_1 > a$ என்று கொள்க. அப்போது

$$R = k^2 m_1 \left\{ \frac{1}{(a^2 + a_1^2 - 2aa_1 \cos S)^{\frac{1}{2}}} - \frac{a \cos S}{a_1^2} \right\}$$

$$= \frac{k^2 m_1}{a_1} \left\{ \left(\frac{a^2}{a_1^2} + 1 - \frac{2a}{a_1} \cos S \right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{a}{a_1} \cos S \right\}$$

$$= \frac{k^2 m_1}{a_1} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{a}{a^2} \right)^2 + \frac{a}{a_1} \cos S + \cdots - \frac{a}{a_1} \cos S \right\}$$

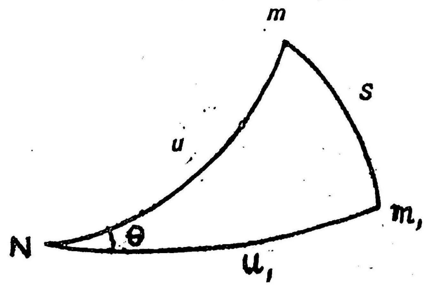
$$= \frac{k^2 m_1}{a_1} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{a}{a_1} \right)^2 + \frac{3}{8} \left[2 \left(\frac{a}{a_1} \cos S - \frac{a^2}{a_1^2} \right) \right]^2 + \cdots \right\}$$

இதில் $\cos^2 S$, $\cos^3 S$ ஆகியவற்றை, $\cos 2S$, $\cos 3S$, ...ன் சார்பாக எழுதியபின்

$$R = \Sigma \, c_j \cos j \, S$$

என்ற வடிவம் கிடைக்கும். இங்கு C_j ஆனது a, a_1 ஆகியவற்றில் சார்பு. S ஆனது கிரகங்களின் இயல்பு நெறிப் பிறழ்ச்சிகளின் வித்தியாசம் ஆகும்.

அடுத்தபடியாக, m, m_1 ஆகியவற்றின் சுற்றுப்பாதைத் தளங்கள் ஒன்றுக் கொன்று θ கோணம் சாய்ந்திருப்பதாகக் கொள்க. கோளத் திரிகோணமிதியின் கொசைன் சூத்திரப்படி, இவற்றின் குறுக்குக் கோட்டுக் கோண வீச்சங்கள் முறையே u, u_1 எனில்



படம் 7·4

$$\cos S = \cos u \cos u_1 + \sin u \sin u_1 \cos \theta$$
$$= \cos^2 \frac{\theta}{2} \cos (u-u_1) + \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos (u + u_1)$$

பாதைத்தளங்களின் சாய்வுக் கோணங்கள் i, i' எனில்,

$$\cos S = \cos^2 \frac{i - i_1}{2} \cos (u - u_1) + \sin^2 \frac{i - i_1}{2} \cos (u + u_1).$$

இதனால் $R = \Sigma\, C_j \cos j\, S$

$$= \Sigma\, C_{jj_1} \cos (j\, u + j_1\, u_1)$$

இங்கு C_{jj_1} என்பவை a, a_1, i, i_1 ஆகியவற்றில் சார்புகள். j, j_1 என்பன முழுக்கள் (integers).

கடைசியாக, கிரகங்களின் சுற்றுப்பாதைகளை நீள் வளையங்களாகக் கொள்க. இதனால் C_{jj_1} என்பன, r, r_1, i, i_1 ஆகியவற்றில் சார்புகள், $u = \bar{\omega} - \Omega + w$, $u_1 = \bar{\omega}_1 - \Omega_1 + w_1$ என்று பிரதியிடுக. $r, r_1, \cos w, \sin w, \ldots.$ முதலியவைகளைச் சராசரி நெறிப்பிறழ்ச்சிகளாகிய M, M_1, மேலும் $\Omega, \Omega_1, \bar{\omega}, \bar{\omega}_1$ ஆகியவற்றில் காலவட்டச் சார்புகளாக (சிறப்பாக, கொசைன்களாக), அத்தியாயம் 3ல் காட்டியதுபோல் எழுதிக் கொள்க. இப்போது

$$R = \Sigma\, C \cos D \tag{52}$$

C-ன் வடிவம் $A\, e^j\, e_1{}^{j_1} (\tan i_1)\ (\tan i_1)\, l_1$, A என்பது a, a_1 ஆகியவற்றில் (—1) அடுக்கு கொண்ட ஓரினச்சார்பு, D என்பது

$$h\,(nt + \epsilon) + h_1\,(n_1\, t + \epsilon_1) + g\, \bar{\omega} + g_1\, \bar{\omega}_1 + f\, \Omega + f_1\, \Omega_1 \tag{53}$$

ஆகும். மூலகங்களை, m, m_1 ஆகியவற்றின் கொஞ்சு மூலகங்களாகக் கொள்ளலாம். h, h_1, g, g_1, f, f_1 என்பன முழுக்கள். முன் கூறியது போலவே, $\frac{\partial R}{\partial a}$ ஐக் காணும் பொழுது, Dல் உள்ள n, n_1 ஆகியவற்றை a, a_1ன் சார்புகளாகக் கருதக்கூடாது. சராசரி நெடுங் கோட்டுக்கோணம் 7·5ல் விவரித்தபடி எடுத்துக் கொள்ளப்படும்.

7·9 பொது அசைவுகள்

(52)ஆம் சமன்பாட்டை எடுத்துக்கொள்க. இங்கு Dன் வடிவம் (53)இல் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. h, h_1 என்பன ஏதேனும் இரு முழுக்கள் என்றேம். $hn + h_1 n_1 = 0$ என்றாலோ, அல்லது $h = 0, h' = 0$ என்றாலோ, Rல் ஒரு உறுப்பு tஇல் நேரடிச் சார்பற்றதாக அமைந்து விடுகிறது. அத்தகைய உறுப்பை $C_o \cos D_o$ என்று குறிப்போம். மற்ற உறுப்புகளில் t நேரடியாக வருவதில்லை. குறிப்பிட்ட மூலகங்

களைப் பொறுத்து பகுதி வகைக்கெழு எடுத்தபின்னர் குணகங்களைப் C', C_o' என்று குறிக்கப்படும்.

இனி (34)ஆம் சமன்பாடுகளைத் தொகைப்படுத்த முற்படுவோம்.

(34)இல் கடைசி மூன்றினை எடுத்துக் கொள்க. இவற்றில் $\frac{\partial R}{\partial i}$, $\frac{\partial R}{\partial a}$, $\frac{\partial R}{\partial e}$ மட்டுமே வருகின்றன. C க்கள் மட்டுமே $a, e, i,$ ல் சார்புகள் என்பதால், P என்பது Ω, $\overline{\omega}$, ϵ ல் ஏதேனுமொன்றைக் குறித்தால்,

$$\frac{dP}{dt} = \Sigma\, C' \cos D + C'_{p_o} \cos D_o$$

இங்கு $C'_{p_o} \cos D_o$ல் t ஆனது நேரடியாக வரவில்லை என்பதை நினைவில் வைக்க.

தோராயக் கணக்கீட்டில் முதற்படியாக, மூலகங்களுக்கு அவற்றின் கொஞ்சு மதிப்புகளைத் தந்து, இதனை tஐப் பொறுத்துத் தொகைப்படுத்தினால்,

$$P = \Sigma\, \frac{C'_p \sin D}{hn + h_1 n_1} + t\, C'_{p_o} \cos D_o + \text{மாறிலி}$$

அடுத்தபடியாக, (34)இல் e, i க்கான சமன்பாடுகளை எடுத்துக் கொள்வோம். இவற்றில் Rக்கு $\overline{\omega}$, ϵ, Ω ஆகியவற்றைப் பொறுத்த பகுதி வகைக் கெழுக்கள் வருகின்றன. C க்கள் $\overline{\omega}$, ϵ, Ω ல் சார்புகளல்ல என்பதால், Q என்பது e அல்லது i ஐக் குறிக்குமாயின்,

$$\frac{dQ}{dt} = \Sigma\, C_q \sin D + C_{q_o} \sin D_o$$

இதனை t ஐப் பொறுத்துத் தொகைப்படுத்தினால்,

$$Q = -\Sigma\, C_q \frac{\cos D}{hn + h_1 n_1} + t\, C_{q_o} \sin D_o + \text{மாறிலி}$$

கடைசியாக (34)ல் $\frac{da}{dt}$ ன் சமன்பாட்டை எடுத்துக் கொள்க.

இதில் $\frac{\partial R}{\partial \epsilon}$ வருகிறது. $\Sigma\, C \cos D$ல் ஒரு உறுப்பில் $h = h' = 0$ எனில் அந்த உறுப்பில் t வெளிப்படையாக வராது அல்லவா? அத்துடன் ϵம் வராது. ஏனெனில் ϵ ஆனது Dல் $h(nt + \epsilon) + h_1(n_1 t + \epsilon_1)$ என்ற வடிவில்தான் வந்துள்ளது. இதனால் Rல் ஒரு

உறுப்பில் t வரவில்லை எனில் அதில் ϵ உம் இருக்காது. அதாவது ϵ இருந்தால் tம் இருந்தாக வேண்டும். எனவே

$$\frac{da}{dt} = \Sigma\, c_a\,(h+h')\sin D$$

$$= \Sigma\, c_1 \sin D \text{ என்க.}$$

எனவே $a = -\ \Sigma \dfrac{c_1 \cos D}{hn+h'n'}$

இவ்வாறு, முதற்படியில், $e, i, \Omega, \varpi, \epsilon$ ஆகியவற்றின் வடிவங்களில் $\Sigma\, A \cos D$ என்ற காலவட்டச் சார்புகளுடன், Bt என்ற tஐப் பொறுத்து வளரும் உறுப்பும் வருகிறது. Bt என்ற உறுப்பினை நீள் கால அசைவு (secular perturbation) என்று கூறுவர். a ல் மட்டும் நீள் கால அசைவு உறுப்பு ஒன்றுமில்லை என்பது கவனிக்கத் தக்கது.

இவ்விதம் ஒவ்வொரு கிரகத்தினாலும் mக்கு ஏற்படும் அசைவுகளைக் கணித்து, மொத்த அசைவில் முதற்படித் தோராயத்தைப் பெறலாம்.

7·10 தோராய முறை

$x_1, x_2 \ldots, x_n$ என்ற n மாறிகளில்

$\dot{x}_i = f_i\,(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n, t)$ என்ற n வகைக்கெழு சமன்பாடுகள் தரப்பட்டிருந்தால், அவற்றினைத் தீர்க்க நல்ல தோராய முறை ஒன்றினை, வானியலில் பயன்படுத்தி வந்துள்ளனர். x_1, x_2, x_nன் மதிப்புகள், $t=0$ என்ற நேரத்தில் பூச்சியங்கள் என்று கொள்க. இது எப்போதும் சாத்தியமே; ஏனெனில், இவற்றின் மதிப்புகள் $t=0$க்குச் சரியாக $x_1', x_2', \ldots, x_n'$ எனில், $x_1 - x_1', x_2 - x_2' \ldots, x_n - x_n'$ ஆகியவற்றையே மாறிகளாகக் கொள்ளலாம் என்பதனால். ஒவ்வொரு fஐயும் டேலர் தேற்றப்படி விரிவுபடுத்தினால், கொடுத்துள்ள சமன்பாடுகளை

$$\dot{x}_i = f_i\,(0, 0, .., 0, t) + \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + x_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right) f$$

$$+ \frac{1}{\underline{|2}}\left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots\ldots + x_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^2 f + \ldots \quad (54)$$

இங்கு பகுதி வகைக் கெழுக்கள் அனைத்துக்கும் $(0, 0, \ldots 0, t)$ல் அவற்றிற்கான மதிப்புகளை எழுதவேண்டும் என்பதைக் கவனிக்க.

இப்போது

$$x_i = x_{i1} + x_{i2} + x_{i3} + \ldots$$

எனில்,

$$\dot{x}_i = \dot{x}_{i1} + \dot{x}_{i2} + \dot{x}_{i3} + \ldots \quad (55)$$

முதற்படியாக, (54), (55)ஐ ஒப்பிட்டு,

$$\dot{x}_{i1} = f_i\,(0, 0 \ldots, 0, t)$$ என்று கொள்க. இதனால்

$$x_{i1} \int_{t_0}^{t} f_i\,(0, 0, \ldots, 0, t)\,dt, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

ஆகவே முதற்படியாக, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ அனைத்தும் தோராயமாக முறையே $\int_{t_0}^{t} f_1\,(0, 0, \ldots, 0, t)\,dt$, $\int_{t_0}^{t} f_2\,(0, 0, \ldots, 0, t)\,dt, \ldots\ldots$ $\int_{t_0}^{t} f_n\,(0, 0, \ldots, 0, t)\,dt$ என்று கணக்கிடப்பட்டன.

அடுத்தபடியாக,

$$\dot{x}_{i2} = x_1 \frac{\partial f_i}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f_i}{\partial x_2} + \ldots + x_n \frac{\partial f_i}{\partial x_n}$$

என்று கொள்க. $x_1, x_2, \ldots x_n$ன் தோராய மதிப்புகள் t ன் சார்பாக ஏற்கெனவே பெறப்பட்டுள்ளன. பகுதி வகைக் கெழுக்கள் $(0, 0, \ldots, 0, t)$ ல் கணக்கிட்டப்பட்டு இங்கு புகுத்தப்பட்டால், இரு புறமும் தொகைப் படுத்தலாம். இவ்விதம்

$$x_{i2} = \int_{t_0}^{t} \left(x_1 \frac{\partial f_i}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f_i}{\partial x_2} + \ldots + x_n \frac{\partial f_i}{\partial x_n} \right) dt,$$

$$i = 1, 2, \ldots n$$

இவ்விதமாக இரண்டாம் படியில்,

$$x_i = x_{i1} + x_{i2}, \quad i = 1, 2, \ldots n$$

என்று தோராயமாகக் கணக்கிடப்பட்டன.

மூன்றும் படியாக,

$$\dot{x}_{i3} = \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + x_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right) f + \frac{1}{\underline{|2}} \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + x_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^2 f$$

என்று கொள்க. இங்கு $x_1, x_2, \ldots, x_n$, அவற்றின் முதலிரண்டு படிகள் கொண்ட பகுதி வகைக் கெழுக்கள் ஆகியவை t ன் சார்புக

ளாக அறியப்பட்டிருப்பதால், அவற்றை இதனில் புகுத்தித் தொகைப்படுத்த,

$$x_{i3} = \int_{t_0}^{t} \dot{x}_{i3}\, dt\ ,\ i = 1, 2, \ldots, n$$

என்று கிடைக்கும். இவ்வாறு மூன்று படிகளுக்கு x_i ன் மதிப்பு $x_{i1}+x_{i2}+x_{i3}$ என்று கணக்கிடப்படும். இம்முறையில் தொடர்ந்து செயல்படுவதால், $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ன் மதிப்புகளை வேண்டிய அளவு நுணுக்கமாகப் பெறமுடியும்.

7.11 பொது அசைவுகள் — தொடர்ச்சி

முதற்படித் தோராயமாக m எனும் கிரகத்தின் $a, e, i, \Omega, \omega, \epsilon$ ஆகிய மூலகங்களின் மதிப்புகளைப் பெறும் முறையை 7.9ல் விவரித்தோம். இரண்டாம் படித்தோராயமாக இவற்றினை, அறிய, 7·10ல் விவரித்த முறையைக் கடைபிடிப்போம். இதற்கு, மூலகங்களின் முதற்படித் தோராய மதிப்புகள் m க்கு மட்டுமின்றி, m_1 க்கும் கண்டு பிடிக்கப்படவேண்டும். m_1 ன் மூலகங்களின் முதற்படித் தோராய மதிப்புகளில் m மட்டுமன்றி, ஏனைய எல்லா கிரகங்களின் திணிவுகளும் குணகங்களாக அமைவதைக் கவனிக்க.

$$a = a'_0 + a'_1 + a_2' + \ \ldots .$$

எனில், a_0 என்பது கொஞ்சு மதிப்பு, a'_1 என்பது 7·9ல் கண்ட மதிப்பு, a'_2 ஆனது

$$\frac{d'a_2}{dt} = \Sigma \left\{ a'_1 \frac{\partial C_1}{\partial a_0} \sin D + e'_1 \frac{\partial C_1}{\partial e_0} \sin D + i'_1 \frac{\partial C_1}{\partial c_{i0}} \sin D \right.$$
$$+ \Omega'_1 C_1 f \cos D + \omega_1' C_1 g \cos D + (\epsilon_1' + \rho_1') C_1 h \cos D$$
$$+ \Sigma'$$

என்ற சமன்பாட்டிலிருந்து கிடைக்கும். இங்கு Σ' என்பது Σக்குள் இருக்கும் கோவையைப் போன்ற மற்றொரு கோவை; ஆனால் அது அசைக்கும் கிரகத்திற்கானது. இச்சமன் பாட்டைத் தீர்ப்பது மிக நீண்ட செயல். ஏனெனில் இதில் பலகந்தழித்தொடர்கள் உள்ளன. அவையனைத்தையும் பெருக்கி, பிறகு அதிலுள்ள மூலகங்களுக்கு அவற்றின் முதற்படித் தோராய மதிப்புகளைத் தந்து, பிறகு தொகைப் படுத்தவேண்டும். இது நீண்ட செயலாயினும் கடினமானதல்ல.

இரண்டாம்படித் தோராயத்திலுள்ள உறுப்புகளில் mm_i அல்லது $m^2{}_i$ அல்லது $m_i\ m_j$ ஆகியவற்றிலொன்று குணகமாக இருக்கும். பொதுவில் சூரியனின் திணிவுடன் ஒப்பிடுகையில் கிரகங்களின்

திணிவுகள் சிறியனவேயாகையால், இரண்டாம்படித் தோராயத்தை, " திணிவுகளில் இரண்டாம்படி பொது அசைவு " (General perturbation of the second order in the masses) என்று குறிப்பிடுகிறார்கள். m_i ஆனது m ஐ அசைப்பதன் விளைவாக, m ஆனது திருப்பி m_i ஐ அசைக்கும்; இந்த அசைவை $m\,m_i$ உறுப்புகள் குறிக்கும். இந்த அசைவினால் m மறுபடி அசைக்கப்படுமல்லவா? அதனை m_i^2 கொண்டுள்ள உறுப்புகள் குறிக்கும். m_i ஆனது m ஐ அசைப்பதால், m ஆனது m_j என்ற கிரகத்தை அசைக்கும் அல்லவா? அதன் விளைவாக m_j ஆனது m_i ஐ அசைக்கும், மேலும் m_j ஆனது m ஐ அசைப்பதன் விளைவாக m ஆனது m_i ஐ அசைக்க, அதன் விளைவாக m_i ஆனது திரும்ப m_j ஐ அசைக்கும். இவ்விரு அசைவுகளையும் $m_i\,m_j$ ஐக் குணங்களாகக் கொண்ட உறுப்புகள் குறிக்கும்.

இவ்வாறே மூன்றாம்படி, நான்காம்படி, ... தோராயங்களைக் கணக்கிடலாம். கணக்கிடு வேலை மிகவேகமாகப் பெருகி வருமாயினும் கடினமானதல்ல. பொதுவில் இரு தோராயங்களே போதுமானவை. ஆனால் வியாழன், சனி போன்ற பெரிய கிரகங்களின் அசைவுகளைக் கணக்கிடுகையில் மூன்று தோராயங்கள் தேவைப்படும். அத்துடன் $h\,n+h_1\,n_1$ என்பது மிகச்சிறிய எண்ணாக இருக்கும் போது இது பகுதியில் வரும் உறுப்புகள் பெரியனவாக இருக்கலாம் என்பதால் மூன்றாம் தோராயமும் கணக்கிடவேண்டி வரலாம்.

பொதுவில் m-படித் தோராயங்களுக்குப் பின்னர் மூலகங்களின் கோவைகளில் வரும் உறுப்புகள்.

$A\cos(\nu t+h)$, At^m, $At^m\cos(\nu t+h)$ போன்ற வடிவத்திலுள்ளவை. $A\cos(\nu t+h)$ என்பன கால வட்டச்சார்புகள். At^m என்பன நீள்காலப் போக்குடையன (secular). $At^m\cos(\nu t+h)$ என்பன கலப்பு உறுப்புகள்.

இந்தத் தொடர்கள் அனைத்தும் குவித்தொடர்கள் தாமா? ஒரு தொடர் குவியவில்லை எனில் அந்த மூலகம் நாளாவட்டத்தில் மிக மிகப் பெரிய மதிப்புகளை மேற்கொள்ளுமே? ஆம் எனில், சூரிய குடும்பத்தின் கதி யாது? எடுத்துக் காட்டாக, ஒரு கிரகத்தின் a ஆனது நாளடைவில் எல்லையின்றி மிகப் பெரியதாக வளர்ந்து கொண்டேபோனால், கடைசியில் அது சூரிய குடும்பத்திலிருந்து நீங்கிச் சென்று விடாதா? இக் கேள்விகளுக்கு நிச்சயமாக விடையளிக்க இயலாது. ஏனெனில், ஒரு கந்தழித் தொடரின் பல உறுப்புகள் நீள் காலப்போக்கு பெற்றவையாக இருக்கலாம்; ஆயினும் தொடர் குவித்தொடராக இருக்கலாம். எடுத்துக்காட்டாக,

$$\cos at = 1 - \frac{a^2 t^2}{\underline{|2}} + \frac{a^4 t^4}{\underline{|4}} - \dots$$

என்ற தொடரில் முதல் உறுப்புக்குப்பின் ஒவ்வொரு உறுப்பும் நீண் காலப்போக்குடையது; ஆயினும் தொடர் குவிகிறது. எனவே, கந்தழித் தொடர்களின் குவிதன்மைக்கும், சூரிய குடும்பத்தின் உறுதிச் சமநிலை (stalility) க்கும் யாதொரு சம்மந்தமும் காண இயலாது.

7.12 சந்திர இயக்கக் கொள்கைகள் (Lunar theories)

இதுவரை நாம் கிரகங்களின் போக்குகளைப்பற்றி ஆராய்ந்தோம். முப்பொருள் இயக்கத்தில் மற்றொரு தோராயம் கவனிக்கத்தக்க தாகும். இப்பொருள்கள் சூரியன், பூமி, சந்திரன் என்க. சூரியனுக்கும் பூமிக்கும் உள்ள தூரம் சுமார் $149{\cdot}60\times 10^6$ கி.மீ சந்திரனுக்கும் பூமிக்குமுள்ள தூரம் சுமார் $384{\cdot}4\times 10^3$ கி.மீ. இதனால், சந்திரனுக்கும் பூமிக்குமிடையேயுள்ள தூரம், சூரியன்—பூமித்தூரத்தில் 0·002571 பங்குதான் உள்ளது. இதன் விளைவாக, சூரியனின் திணிவு பூமியின் திணிவைப்போல பலமடங்குகள் இருந்தாலும், சந்திரன் மேல் பூமியின் ஈர்ப்பு விசை சூரியனின் மேலான ஈர்ப்பு விசையைப்போல் சுமார் நூறு பங்கு இருக்கிறது. R என்பது பூமிக்கும் சூரியனுக்கும் இடைத்தூரம், r என்பது பூமிக்கும் சந்திரனுக்கும் இடைத் தூரம் எனில், சந்திரன் மேல், பூமியின் ஈர்ப்பு விசை $\frac{mk^2}{r^2}$ சூரியனின் ஈர்ப்பு விசை சுமார் $\frac{1\cdot k^2}{(R+r)^2}$, சூரியனுக்கு பூமியின் மேல் விசை $\frac{k^2}{R^2}$. இவ்விரண்டின் வித்தியாசம் சுமார் $\frac{k^2\, 2r}{R^3}$. எனவே சத்திரன் பூமியைச் சுற்றி வருகையில், அதனை அசைக்கும் சூரியனின் ஈர்ப்பு விசை, பூமியின் ஈர்ப்பு விசையில் $\frac{k^2. 2r}{R^3} \Big/ \frac{mk^2}{r^2}$ பங்கு, அதாவது $\frac{2}{m}\left(\frac{r}{R}\right)^3$ பங்கு ஆகும். இதன் சுமார் மதிப்பு 0·01.

சந்திரன் மேல் கிரகங்களின் நேரடி ஈர்ப்பு விசை மிகமிகச் சிறியது. ஆகவே இதனை விட்டுவிடலாம். ஆனால் கிரகங்களின் ஈர்ப்பு விசையினால் பூமியின் போக்கு அசைக்கப்படுகிறது; இவ் அசைவுகள் மிகச் சிறியனவாயினும் இவற்றின் விளைவாகச் சந்திர னில் ஏற்படும் அசைவுகள் குறிப்பிடத்தக்கவை. இவ்விதம் கிரகங்கள் சந்திரன் மேல் மறைமுகமாக அசைவுகளை ஏற்படுத்துகின்றன.

மேற் கூறிய காரணங்களினால், கிரக இயக்கத்தினின்று சந்திரனின் இயக்கம் மாறுபட்டது; ஆகவே இதனை ஆராய்வதற்

கான வழி முறைகளும் தனிப்பட்டவை. இவற்றை முதலில் ஆராய்ந்தவர் ஆய்லர் (Euler) ஆவார். அவருக்குப் பின்னர் குறிப்பிடத்தக்க ஆராய்ச்சிகள் செய்துள்ள பலருள் ஹான்சன் (Hansen), டிலானே (Delaunay), ஹில் (Hill), பிரவுன் (Brown) ஆகியோர். தற்காலத்தில் பயன்படுத்தப்படும் சந்திர அட்டவணைகள் (Lunar Tables) ஹில்-பிரவுன் ஆராய்ச்சிகளால் பெறப்பட்டவையே.

பயிற்சி

1. $[a_i, a_j]$ என்பது லாகிராஞ்சு அடைப்பு என்க. $a, e, i, \Omega, \bar{\omega}, \epsilon$ ஆகிய ஆறு மூலகங்களுக்கிடையில் பூச்சியமாகாத, ஒன்றுக்கொன்று சார்பற்ற, ஆறு லாகிராஞ்சு அடைப்புகளே உள்ளன என்று காட்டுக. மேலும்

$$[a, \epsilon] = -\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{a}}$$

$$[e, \bar{\omega}] = \frac{e\sqrt{\mu a}}{\sqrt{1-e^2}}$$

$$[i, \Omega] = \sqrt{\mu a(1-e^2)}\,\sin i$$

$$[a, \Omega] = \tfrac{1}{2}\sqrt{(1-e^2)}\sqrt{\frac{\mu}{a}}\,(1-\cos i)$$

$$[a, \bar{\omega}] = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{a}}\,(1-\sqrt{1-e^2})$$

$$[e, \Omega] = \frac{-e\sqrt{\mu a}\,(1-\cos i)}{\sqrt{1-e^2}}$$

என்றும் காட்டுக. இவைகளைப் பயன்படுத்தி பாயிசான் அடைப்புகளைப் பெறுக.

2. பல கிரகங்களுக்கு e ஆனது மிகச் சிறிய எண்ணாக அமைகிறது. இதனால் $\frac{de}{dt}$, $\frac{d\bar{\omega}}{dt}$ என்பனவற்றில் வரும் $\cot\phi$ மிகப் பெரிய எண்ணாகி விடுகிறது. இதனால் கணக்கீடுகள் கடினமாகின்றன. இதனைத் தவிர்ப்பதற்காக,

$$h_1 = e\sin\bar{\omega}$$

$$k_1 = e\cos\bar{\omega}$$

என்றிடுக. பிறகு

$$\frac{dh_1}{dt} = \frac{\cos\phi}{\sqrt{\mu a}}\frac{\partial R}{\partial k_1} + \frac{k_1\tan\frac{1}{2}i}{\cos\phi\sqrt{\mu a}}\cdot\frac{\partial R}{\partial i} - \frac{h_1\cos\phi}{2\cos^2\frac{1}{2}\phi\sqrt{\mu a}}\cdot\frac{\partial R}{\partial \epsilon}$$

$$\frac{dk_1}{dt} = -\frac{\cos\phi}{\sqrt{\mu a}}\frac{\partial R}{\partial h_1} - \frac{h_1\tan\frac{1}{2}i}{\cos\phi\sqrt{\mu a}}\cdot\frac{\partial R}{\partial i} - \frac{k_1\cos\phi}{2\cos^2\frac{1}{2}\phi\sqrt{\mu a}}\frac{\partial R}{\partial \epsilon}$$

என்று காட்டுக.

3. சாய்வுக் கோணம் i ஆனது மிகச் சிறிய எண்ணாக இருக்கும் போது $\frac{di}{dt}$, $\frac{d\Omega}{dt}$ ல் வரும் $\frac{1}{\sin i}$ மிகப் பெரியதாகி விடுகிறது. இதனைத் தவிர்க்க $h_2=\sin i \sin \Omega, k_2= \sin i \cos \Omega$ என்றிடுக. பிறகு

$$\frac{dh_2}{dt} = \frac{\cos i}{\cos \phi \sqrt{\mu a}} \cdot \frac{\partial R}{\partial k_2} - \frac{h_2 \cos i}{2 \cos^2 \frac{1}{2} i \cos \phi \sqrt{\mu a}} \left(\frac{\partial R}{\partial \bar{\omega}} + \frac{\partial R}{\partial \epsilon} \right)$$

$$\frac{dk_2}{dt} = -\frac{\cos i}{\cos \phi \sqrt{\mu a}} \cdot \frac{\partial R}{\partial h_2} - \frac{k_2 \cos i}{2 \cos^2 \frac{1}{2} i \cos \phi \sqrt{\mu a}} \left(\frac{\partial R}{\partial \bar{\omega}} + \frac{\partial R}{\partial \epsilon} \right)$$

என்று காட்டுக

4. சமன்பாடுகள் (36)ல் $\frac{da}{dt}$ ன் சமன் பாட்டுக்குப் பதில்

$$\frac{dn}{dt} = - \frac{3 \{ S \sin \phi \sin w + T (1+e \cos w) \}}{a \cos \phi}$$

என்ற சமன்பாட்டை எடுத்துக் கொள்ளலாம் என்று காட்டுக.

5. $l = a (1-e^2)$ என்பது நீள்வட்டப்பாதையின் செவ்வகலத்தில் பாதி (semi-latus rectum)

$$\frac{dl}{dt} = \cos^2 \phi \frac{da}{dt} - 2a \sin\phi \frac{de}{dt}$$

$$= 2r T \cos \phi \sqrt{\frac{a}{\mu}}$$

என்று காட்டுக

6. $(a, e, i, \Omega, \omega, \chi)$ என்பன கிரகத்தின்மூலகங்கள் எனில் பின்வருவன வற்றை நிறுவுக

$$\dot{a} = \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial \chi},$$

$$\dot{e} = \frac{1}{na^2 e} \left\{ (1-e^2) \frac{\partial R}{\partial \chi} - \sqrt{1-e^2} \frac{\partial R}{\partial \omega} \right\}$$

$$\dot{\chi} = - \frac{1-e^2}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a}$$

$$\dot{\Omega} = \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial i}$$

$$\dot{\omega} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{\cot i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i},$$

$$\dot{i} = \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \left\{ \cot i \frac{\partial R}{\partial w} \operatorname{cosec} i \frac{\partial R}{\partial \Omega} \right\}$$

7. (விரியல் தேற்றம்) u பொருள் இயக்கத்தில்

$I = \Sigma m_i (x_i^2+y_i^2+z_i^2)$ என்க $\ddot{I}=4T + 2U$ என்று காட்டுக. பொருள்கள் உறுதிநிலை (stable)யில் இருப்பின்

$\ddot{I}$ குறையெண்ணாக இருக்கும் என்று நிரூபிக்க.

8. $m_1 \, m_2 \, m_3 \ldots\ldots m_n$ என்ற திணிவுள்ள n பொருள்களுக்கு O என்பது திணிவு மையம் O ஐ ஆதிப் புள்ளியாகக் கொண்ட அச்சுகளைப் பொறுத்து m_iன் இருப்பிடக் கூறுகள் $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i,)$ என்க. $\mu_o=0$, $\mu_i=m_1+m_2+m_2+\ldots\ldots\ldots +m_i$ என்க. $m_1, m_2, m_3, \ldots\ldots m_{i-1}$ ஆகிய $i-1$ பொருள்களுடைய திணிவு மையம். G_i எனில், G_i ஐப் பொறுத்து (x_i, y_i, z_i) என்ற கூறுகள் கொண்ட புள்ளியில் μ_i என்ற திணிவுள்ள பொருளை வைத்திருப்பதாகக் கருதுக. $i=2, 3, 4 \ldots\ldots n$. இப் புதிய பொருள்கள் $\mu_2, \mu_3, \mu_4 \ldots\ldots \mu_n$ ஆகியவற்றின்

இயக்க சக்தி $T=\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{n} m_i \frac{\mu_i-1}{\mu_i}(x_i^2+y_i^2+z_i^2)$ என்று காட்டுக.

இங்கு (x_1, y_1, z_1) என்ற புள்ளி கிடையாது.

மேலும் சுழல் உந்த வெக்டர் (h_1, h_2, h_3) எனில்

$$h_1 = \Sigma m_i \frac{\mu_i-1}{\mu_i} \left(y_i \dot{z} - z_i \dot{y} \right)$$

$$h_2 = \Sigma m_i \frac{\mu_i-1}{\mu_i} \left(z_i \dot{x} - x_i \dot{z} \right)$$

$$h_3 = \Sigma m_i \frac{\mu_i-1}{\mu_i} \left(x_i \dot{y}_i - y_i \dot{x}_i \right)$$

என்றும் காட்டுக. (இது ஜாகோபியின் வழி, இதில் n பொருள்களுக்குப் பதில் $n-1$ கற்பனைப் பொருள்களின் இயக்கத்தைக் கருதுவது கவனிக்கத்தக்கது.)

8. நேரக்கணிப்பு, பிற்போக்கு, அச்சலைவு

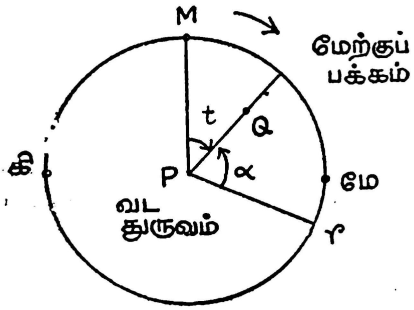
8.1 காலம் என்பது யாது என்னும் ஆராய்ச்சி தத்துவ இயலைச் சேர்ந்தது. வானியலில் கால அளவுகள் நன்கு வரையறுக்கப்பட்டு இருக்க வேண்டும். ஏனெனில் இயக்கவியலில் நேரம் தான் சார்பற்ற மாறி, அதனைக் கொண்டே எல்லா விண் பொருள்களின் மூலகங்களும் தரப்படுகின்றன.

ஆதிக்காலத்திலிருந்து காலத்தை அளக்க, பூமியின் சுற்றுதல் பயன் படுத்தப்பட்டு வந்துள்ளது. காட்சிப் பதிவுகள் மூலமே காலத்தை அளக்க முடியுமாதலால், எந்த விண்பொருளைக் கவனித்து காலத்தைக் கணக்கிடுகிறோமோ அதனைப்பொறுத்து வெவ்வேறு கால அளவுகள் வழக்கத்திலுள்ளன. அவற்றில் முக்கியமானவை மீன்வழி நேரம், தோற்ற ஞாயிற்று நேரம், சராசரி ஞாயிற்று நேரம் ஆகியவை.

8.2 மீன்வழி நேரம் (siderial time) மேடமுதற்புள்ளி ஓரிடத்தின் உச்சிவட்டத்தை மேற்புரம் (upper) அடுத்தடுத்து தாண்டும் கால அளவு ஒரு மீன்வழி நாள் (siderial day) எனப்படும். மேடமுதற்புள்ளி உச்சிவட்டத்தை மேற்புறம் தாண்டுகையில் மீன்வழி நாள் தொடங்குகிறது. ஒரு மீன்வழி நாளை 24 சம பாகங்களாக்கி ஒவ்வொரு பாகத்தையும் மீன்வழி மணி (siderial hour) என்றும், ஒவ்வொரு மீன்வழி மணியையும், 60 சமபாகங்களாக்கி ஒவ்வொன்றையும் மீன்வழி நிமிடம் என்றும், ஒவ்வொரு நிமிடத்தையும் 60 சமபாகங்களாக்கி, ஒவ்வொரு பாகத்தையும் மீன்வழி நொடி என்றும் குறிப்பிடுகிறோம். கொடுத்துள்ள நேரத்தில் மீன்வழி நேரம் மேடமுதற்புள்ளியின் நேரக்கோணம் (மணி - நிமிடம் - செகண்டு அளவுகளில்) ஆகும். வேறுவிதமாய்க் கூறுமிடத்து பார்வை இடத்தின் (புவிமைய) வலஏற்றமே அவ்விடத்தின் அப்போதைய மீன்வழி நேரம். பல காரணங்களினால் மேடமுதற்புள்ளி இடமாற்றம் கொள்கிறது. அச்சலைவினால் இடமாறிய மேடமுதற்புள்ளியிலிருந்து வல ஏற்றம் கணக்கிடப்பட்டால், அதனைத் தோற்ற மீன்வழி நேரம் (apparent siderial time) என்றும், அன்றைய சராசரி மேடமுதற்புள்ளியிலிருந்து கணக்கிடப்பட்டால் அதனைச் சராசரி மீன்வழி

நேரம் (Mean siderial time) என்றும் கூறுவர். ஒவ்வொன்றும் பார்வை இடத்தைப் பொறுத்தது என்பதைக் கவனிக்க. பெரிய கால இடைவெளிகள் மீன்வழிக்கால அளவில் அளக்கப்படுவதில்லை. எனவே மீன்வழி நேரத்திற்கு வருடம், மாதம், தேதிகள் கிடையாது.

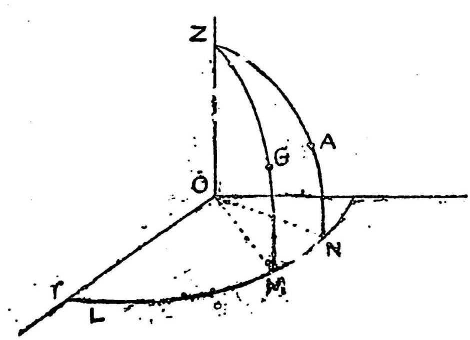
α என்பது Q என்றும் ஒரு விண்பொருளின் வல ஏற்றம், θ என்பது அப்போதைய மீன்வழி நேரம், t என்பது அப்பொருளின் நேரக்கோணம் எனில் $\theta = t + \alpha$ (1)



படம் 8·1

$t + \alpha$ன் மதிப்பு 360°க்கு அதிகமாக இருப்பின் மீன்வழி நேரத்தை $t + \alpha - 360$ எனக் கொள்ள வேண்டும். ஏனெனில் இதன் அளவு முறையில் தேதிகள் கிடையாது.

ஒரு விண்பொருளின் வல ஏற்றம் நமக்குத் தெரிந்ததாக இருந்தால் அப்பொருள் உச்சி வட்டத்தை மேற்புறம் தாண்டும் போது, அதன் நேரக்கோணம் பூச்சியமென்பதால் அச்சமயம் மீன்வழி நேரமும் அப்பொருளின் வல ஏற்றமும் சமம். மீன்வழி நேரத்தைக் கணக்கிட இது ஒரு முறையாகும். விண்பொருள் காட்சி சாலைகளில் (observatories) மீன்வழி நேரத்தைக் காட்டும் கடிகாரங்கள் உள்ளன. படத்தில் பூமியின் ஒரு பாகம் காட்டப்பட்டுள்ளது.



படம் 8.2

O. என்பது பூமியின் மையம், *G* என்பது கிரீனிச்சு, *A* என்பது பார்வையிடம் (Place of observation) என்க. *OZ* என்பது வட துருவத்தை நோக்கியுள்ளது. LMN என்னும் பெருவட்டம் நில நடுக் கோட்டைக் குறிக்கிறது. ZGM, GAN என்ற பெருவட்டங்கள்

முறையே கிரீனிச்சிலும், பார்வை இடத்திலும் உச்சிவட்டங்கள். இவ்விரண்டிற்கும் இடையேயுள்ள கோணமே பார்வை இடத்தின் தீர்க்க ரேகையாகும் படத்தில் இது கிரீனிச்சுக்குச் கிழக்கில் குறிக்கப்பட்டுள்ளது.

கிரீனிச்சில் அப்போதைய மீன்விழி நேரம்

$= \angle Z O \Upsilon$, $\angle ZGM$ ஆகிய பெருவட்டங்களுக்கு இடையே உள்ள கோணம் (மணிகளில்)

$= LM$ (மணிகளில்)

பார்வையிடத்தின் அப்போதைய மீன்விழி நேரம்

$= \angle Z O \Upsilon =$, $\angle ZAN$ ஆகிய பெருவட்டங்களுக்கு இடையேயுள்ள கோணம் (மணிகளில்)

$= LN$ (மணிகளில்)

எனவே பார்வையிடத்தில் மீன்வழி நேரம்

= (அதேசமயத்தில் கிரீனிச்சில் மீன்வழி நேரம்) + (பார்வை யிடத்தின் தீர்க்க ரேகை (மணிகளில்)

இதனுல் கொடுத்துள்ள சமயத்தில் கிரீனிச் மீன்வழி நேரமும் பார்வையிடத்தின் தீர்க்க ரேகையும் தெரிந்திருந்தால், பார்வை யிடத்தின் மீன்வழி நேரம் கணக்கிடப்படும்.

8 3 தோற்ற ஞாயிற்று நேரம்

சூரியனின் நேரக் கோணத்தை தோற்ற ஞாயிற்று நேரம் என் கிறேம். சூரியனின் மையப்புள்ளி, பார்வை இடத்தின் உச்சி வட்டத்தை அடுத்தடுத்து (மேற்புறமாக) தாண்டும் கால அளவு ஒரு தோற்ற ஞாயிற்று நாள் (apparant solar day) ஆகும். நாழிகைக் கோள் (sundial) இதனை அளக்கிறது. இது நாளுக்கு நாள் மாறு படும் கால அளவு. மிகப்பெரிய தோற்ற ஞாயிற்று நாளுக்கும் (டிசம்பர் 24) மிகச்சிறிய தோற்ற ஞாயிற்று நாளுக்கும் (செப்டம்பர் 16) உள்ள வித்தியாசம் $66' 6 - 53' 8 = 12'8$ அல்லது 51 நொடிகள். இக்காரணத்திஞல் தோற்ற ஞாயிற்று நேரத்தைக் காட்டக்கூடிய கடிகாரத்தை ஆக்குவதே மிக்க கடினம். எனவே இது வானியலில் பயன்படுத்தப் படுவதில்லை.

8·4 சாாசரி ஞாயிற்று நேரம்

1898-ல் சைமன் நியூகோம்பு என்பவர் சராசரிச் சூரியன் (mean sun) என்ற புதிய விண்பொருளை மேற்கொண்டார். இது மெய்யான விண்பொருளல்ல, கருத்துதான் என்பதை நினைவில் வைக்க. இது

நடுக்கோட்டுப் பாதையில் மீன்வழி நிலையான வேகத்தில் (Constant siderial motion) செல்வதாகக் கொள்ளப்படுகிறது. மேலும் இதன் வலஏற்றத்தை (கூடியவரை) உண்மை சூரியனின் வல ஏற்றமாக இருக்குமாறு செய்யப்பட்டுள்ளது. உண்மைச் சூரியனுக்கு மீன்வழி வேகம் நிலையானதல்ல என்பதால், சராசரிச் சூரியனின் மீன்வழி வேகமானது. 1900-ம் ஆண்டு ஜனவரி மாதம் பகல் 12-மணிக்கு உண்மைச் சூரியனுக்கு எந்த மீன்வழி வேகம் இருந்ததோ அந்த மீன்வழி வேகமாகக் கொள்ளப்பட்டுள்ளது,

பார்வையிடத்தில் சராசரிச் சூரியனின் நேரக்கோணமே உள்ளூர் நேரம் (Local time) எனப்படும். கிரீனிச்சின் உள்ளூர் நேரம் பொது நேரம் (universal time U. T.) எனப்படுகிறது. பொது நேரமானது நள்ளிரவில் தொடங்கி, 0 முதல் 24 மணி வரை கணக்கிடப்படுகிறது. சராசரி ஞாயிற்று நாள் சராசரி மீன்வழி நாளைவிட 3-நிமிடம் 56·56 நொடிகள் (மீன்வழி அலகுகள்) நீண்டிருக்கும். தேசீயப் பஞ்சாங்கங்களில் (National Ephemeris) சராசரி ஞாயிற்று நேரத்தைச் சராசரி மீன்வழி நேரமாக மாற்றுவதற்கான அட்டவணைகள் தரப்பட்டுள்ளன.

தோற்ற ஞாயிற்று நேரத்திற்கும், சராசரி ஞாயிற்று நேரத்திற்கும் உள்ள வித்தியாசம் காலச் சமன்பாடு (equation of time) எனப்படும். இது சராசரி ஞாயிற்றின் வல ஏற்றத்திற்கும், தோற்ற ஞாயிற்றின் வல ஏற்றத்திற்கும், உள்ள வித்தியாசமாகும்.

எடுத்துக்காட்டு—1. மீன்வழிநேரம் = சராசரி ஞாயிற்று நேரம் $\pm$12 மணி + சராசரி சூரியனின் வல ஏற்றம் என்று காட்டுக.

சராசரி ஞாயிற்று நேரம் = சராசரி ஞாயிற்றின் நேரக் கோணம் $\pm$12 மணி. (2)

எனவே (1)ன்படி இதன் உண்மை புலப்படுகிறது.

பெரிய கால இடைவெளிகளை அளக்க, வருடங்களும், நூற்றுண்டுகளும் பயன்படுகின்றன. மீன்வழி வருடம் என்பது, சூரியனிலிருந்து நோக்குங்கால், பூமியானது சூரியனை ஒருமுறை சுற்றியபின் நட்சத்திரங்களுக்கிடையில் அதே இடத்தை அடைவதற்கான காலமாகும். அயனுந்த வருடம் (tropical year) என்பது. சராசரிச் சூரியன் அடுத்துத்தடுத்து சராசரி மேட முதற்புள்ளியிளைக் கடக்க ஆகும் காலம். அண்மை நிலை ஆண்டு (anomalistic year) என்பது, பூமியின் பாதையில் பூமியானது அண்மைப் புள்ளியிலிருந்து கிளம்பி மறுபடி அண்மைப்புள்ளிக்கு வந்து சேரும் கால இடைவெளியாம். இவ்வருடங்கள் எல்லாம் ஒரே கால அளவைக் குறிப்பதில்லை.

ஜூலியன் நூற்றூண்டில் சரியாக 36525 சராசரி ஞாயிற்று நாள்கள் உள்ளன. கிரிகொரியின் நூற்றூண்டில் சரியாக 365 24·25 சராசரி ஞாயிற்று நாள்கள் உள்ளன. மேலும் T என்பது 1900ம் ஆண்டு ஜனவரி 0·5 $U.T.$ லிருந்து கணக்கிடப்பட்ட நூற்றூண்டு களின் எண்ணிக்கையெனில்,

அயனுந்த வருடம் $= 365{\cdot}24219879 - {\cdot}00000614\ T$ சராசரி ஞாயிற்று நாள்கள்

மீன்வழி வருடம் $= 365{\cdot}25636042 + {\cdot}00000011\ T$,,

அண்மை நிலை ஆண்டு $= 365.25964134 + 00000304\ T$,,

நியூகோம்பு இவற்றைக் கணக்கிட்ட முறையைச் சுருக்கமாகக் காண்போம்.

1900-ம் வருடம் ஜனவரி மாதம் 0·5 தேதி $U.T$ இலிருந்து T ஜூலியன் நூற்றூண்டுகளுக்குப் பின்னர் பூமியைப் பொறுத்து சூரியனின் தோற்றத்தின் சராசரி நெடுங்கோட்டுக் கோணம் L எனில்

$$L = 279^\circ\ 41'\ 48''{\cdot}04 + 129602768''{\cdot}13\ \ T + 1''{\cdot}089T^2 \qquad (2)$$

என்று நியூகோம்பு கணக்கிட்டார். இந்த அளவில் பிறழ்ச்சி (aberration) நீக்கப்பட்டுள்ளது. அயனுந்த வருடம் என்பது L-ன் அளவு 360° அதிகமாவதற்கான காலமாகும். இது δT ஜூலியன் நூற்றூண்டுகள் எனில்,

$L + 360^\circ = 279^\circ 41' 48''{\cdot}04 + 129602768{\cdot}''13(T + \delta T) + 1{\cdot}''\ 089$ $(T + \delta T)^2$. இதிலிருந்து $(\delta T)^2$ஐத் தள்ளியபின் கிடைப்பது,

$$\delta T = \frac{360 \times 60 \times 60''}{12960\,2768''{\cdot}13 + 2''{\cdot}178T} \text{ ஜூலியன் நூற்றூண்டுகள்}$$

$$= \frac{1296000 \times 365{\cdot}25}{1296027{\cdot}6813 + {\cdot}02178\ T} \text{ சராசரி ஞாயிற்று நாள்கள்}$$

எனவே

$$\text{அயனுந்த வருடம்} = \frac{129600 \times 365{\cdot}25}{1296027{\cdot}6813^2}\{1296027{\cdot}6813 - {\cdot}02178T\}$$

சராசரி ஞாயிற்று நாள்கள்

$= (365{\cdot}24219879 - {\cdot}00000614T)$ சராசரி ஞாயிற்று நாள்கள்.

ஒரு அயனுந்த வருடத்தில் நெடுங்கோட்டுக் கோணத்தில் பொதுப் பிற்போக்கு (general precession) $50''{\cdot}2482 + 0''{\cdot}0222T$

என்று நியூகோம்பு கணக்கிட்டார். இதன்படி, ஒரு ஜூலியன் வருடத்தில் இப்பிற்போக்கு x'' எனில்

$$\frac{x}{50{\cdot}2482+{\cdot}0222T}=\frac{365{\cdot}25}{365{\cdot}24219879-{\cdot}00000614T}$$

அதாவது

$$x=50''{\cdot}2493+0''{\cdot}0222T$$

இதனால் சூரியனின் மீன்வழி சராசரி இயக்கம்

$n=1295977{\cdot}4320-0{\cdot}000403\,T$ செகண்டுகள்/ஜூலியன் வருடம் என்றும் இதிலிருந்து

$$\text{மீன்வழிவருடம்}=\frac{365{\cdot}25\times1296000{\cdot}000}{129577{\cdot}4320-0{\cdot}000403\,T}$$

$=365{\cdot}25636042+0{\cdot}00000011T$ சராசரி ஞாயிற்று நாள்கள்.

என்றும். வல ஏற்றத்தில் பிற்போக்கு ஒரு ஆண்டில் $46{\cdot}0636+{\cdot}0279T$ செகண்டுகள் என்றும் நியூகோம்பு கணக் கிட்டார்; இதிலிருந்து சராசரிச் சூரியனின் வல ஏற்றத்தைக் கணக்கிட்டார்.

சராசரிச் சூரியனின் வல ஏற்றம்

$$\alpha=\alpha_0+\mu T+1{\cdot}394T^2 \tag{5}$$

என்று கொண்டார். இங்கு α_0, μ ஆகியவைகளைச் சரியானபடி எடுத்துக்கொள்ள வேண்டும்.

பிறழ்ச்சி (aberration)யின் மதிப்பு 20·50 செகண்டுகள் என்று கொண்டால் சூரியனின் தோற்றத்தின் நெடுங்கோட்டுக்கோணம் $L'=L-20''50$, அதாவது,

$$L'=279°41'\,27''{\cdot}54+129602768''{\cdot}13T+1''{\cdot}089T^2 \tag{6}$$

ஆகும். சராசரிச் சூரியனின் வல ஏற்றமும் உண்மைச் சூரியனின் நெடுங்கோட்டுக் கோணமும் தோராயமாகச் சமமாக இருக்க வேண்டும் என்று கருதினால்

$$\alpha_0=279°\,41'\,27{\cdot}''54$$

$$\mu=129602768''{\cdot}13$$

என்று எடுத்துக்கொள்ளலாம். இவ்விதமாக, சராசரிச் சூரியனின் வல ஏற்றம்

$$\alpha=279°41'\,27''{\cdot}54+129602768''{\cdot}13\,T+1''{\cdot}394T^2 \tag{7}$$

ஆகும். (6), (7)ம் சமன்பாடுகளைக் கவனிக்க. இவற்றில் முதலிரண்டு உறுப்புகள் மட்டுமே சமமாக உள்ளன. மூன்றாம் உறுப்பில் T^2ன்

குணகங்கள் மாறுபட்டுள்ளன. இதனால் $T=10$ ஆக இருக்கும் போது α இலும் T இலும் ஏற்பட்ட வித்தியாசம் (139·4—108·9) செகண்டுகள், அதாவது 1000 வருடங்களில் சராசரிச் சூரியன் உண்மைச் சூரியனை விட 30·5 செகண்டுகள் (கோண அளவில்) அதாவது 2·03 செகண்டுகள் (கால அளவில்) பின் தங்கி விடுகிறது. சராசரிச் சூரிய நாளினை நிலையான (conttant) கால இடைவெளி யாகக் கருதவேண்டுமாயின் இத்தகைய வித்தியாசம் ஏற்பட்டே தீரும்.

ஒரு ஜூலியன் நூற்றாண்டில், சராசரிச் சூரியனின் வலஏற்றம்.

$12960\,2768''\cdot13+2''\cdot788T$ செகண்டுகள் (கோண அளவில்) அதிகமாகிறது. அதாவது $8640184^s\cdot542+0^s\cdot1858T$ (கால அளவில்) அதிகமாகிறது.

எனவே ஒரு சராசரி ஞாயிற்று நாளில் வல ஏற்றத்தில் மாற்றம்

$$=\frac{8640184^s\cdot542+0^s\cdot1858T}{36525}=3\text{நி}\cdot56^s\cdot555360+5^s\cdot09\times106\,T$$

எனவே ஒரு பார்வையிடத்தின் வலஏற்றம், ஒரு சராசரி ஞாயிற்று நாளில் 24-மணி அதிகமாவதற்குப் பதிலாக $(24+x)$ காலம் அதிக மாகிறது. எனவே ஒரு சராசரி ஞாயிற்று நாள் =(24மணி 3நி· 56·555 360 செ+·00000509 T செ.) மீன் வழி அலகுகள். இதிலிருந்து, ஒரு சராசரி மீன்வழி நாள் = (23 மணி 56நி. $04\cdot^s$ 090538 —0^s000 00506T செ.) சராசரி ஞாயிற்று அலகுகள் என்று பெறலாம்.

தற்போது வல ஏற்றத்தில் பிற்போக்கு ஒரு ஜூலியன் நூற்றாண் டிற்கு 4608·60+2·79T செகண்டுகள் என்று கொள்ளுகிறார்கள் இதனால், நடுக்கோட்டில் சராசரிச் சூரியனின் நிலையான மீன்வழி வேகம் ஒரு நூற்றாண்டுக்கு μ செகண்டுகள் என்று கொண்டால், (6) ம் சமன்பாட்டிலிருந்து

$$\mu+4608\cdot60=129602768\cdot13$$

எனவே $\mu=129598159\cdot53$

அதாவது ஒரு ஜூலியன் நூற்றாண்டில் பூமியானது 36625 சுற்று களுக்குச் சுமார் 1840·47 செகண்டுகள் (அதாவது $129600000\cdot00-\mu$) குறைவாகச் சுற்றுகிறது. இதனால் பூமி தன்னைத் தானே ஒரு சராசரி ஞாயிற்று நாளில் 1·002737811906 சுற்றுகள் அதாவது 6·30038748672 ரேடியன்கள் சுற்றுகிறது என்றும், ஒரு சுற்றுக்கு 23 மணி 56நி 04·098904 செகண்டு சராசரி ஞாயிற்று நேரம் எடுத்துக் கொள்கிறது என்றும் கணக்கிடலாம்.

8.5 பஞ்சாங்க நேரம்

இது வரை நம் ஆராய்ச்சியில், பூமி தன்னைத்தானே துருவ அச்சினைச் சுற்றி ஒரு சீரான வேகத்தில் சுழல்வதாகக் கொண்டோம். சமீப காலத்தில் சந்திரன், சுக்கிரன், புதன் போன்ற விண் பொருள் களின் பல காட்சிப் பதிவுகளின் மூலம், இச் சுழல் வேகம் நிலையான தல்ல என்று முடிவு செய்துள்ளனர். எனவே சாராசரி ஞாயிற்று நேரமானது, விண்பொருள் இயக்கவியலுக்கான நியூட்டனின் கால அளவைக் குறிக்காது. இதற்காக, பஞ்சாங்க நேரம் (Ephemeris time-E.T.) என்ற ஒன்றினை வரையறுத்துள்ளனர். இதன் தொடக்கச் சமயம், பொது நேரத்தின் தொடக்கச் சமயமான 1900 வருடம் ஜனவரி மாதம் 0-5-ம் நாள். கொடுத்துள்ள சமயத்தில் பஞ்சாங்க நேரம் T (நூற்றுண்டுகளில்) (3)ம் சமன்பாட்டின்படி நிறுவப் படுகிறது. சுமார் ஐம்பது வருடங்களில் சராசரி ஞாயிற்று நேரத் திற்கும், பஞ்சாங்க நேரத்திற்கும் அரை நிமிடம் வித்தியாசம் ஏற் பட்டுள்ளது. ஒரு பஞ்சாங்க செகண்டு என்பது 1900 - வருடம் ஜனவரியன்று கிரீனிச்சில் பகல் உச்சி வேளையின் அயனுந்த வருடத் தில் 31556925·9747-ல் ஒரு பங்கு ஆகும். அதாவது கடந்த 200 ஆண்டுகளில் சராசரி ஞாயிற்று செகண்டுகளில் கூட்டுச் சராசரி 86400 செகண்டுகள் கொண்டது ஒரு பஞ்சாங்க நாள்.

காட்சிப் பதிவுகளினுல் அளப்பதற்கு எளிதானது மீன்வழி நேரம். சராசரி ஞாயிற்று நேரம் அடுத்தபடியானது. பஞ்சாங்க நேரம் அளப்பதற்கு எளிதல்ல. சராசரி ஞாயிற்று நேரத்துடன்

$$24^s{\cdot}349+72^s{\cdot}3165T+29^s{\cdot}949T$$

என்ற நேர அளவைக் கூட்டினுல் பஞ்சாங்க நேரம் கிடைக்கும்.

பஞ்சாங்க நேரத்தைக் காட்டும் கடிகாரங்களை ஆக்க முயற்சிகள் எடுத்து வருகிருர்கள். சீசியம் கடிகாரங்கள் (Cesium clocks) இவ் விடத்தில் துணைபுரியக்கூடும்.

8.6 பிற்போக்கும் (Precession), அச்சலைவும் (Nutation)

பலநாள்கள் பார்வைக்குள்ளான மீன்களின் நெடுக்கோட்டுக் கோணங்கள் ஒரு வருடத்துக்குச் சுமார் 50"·3 செகண்டுகள் வீத மிகையாகிறது தெரியவரும். இந்த மீன்களின் குறுங்கோட்டுக் கோணங்கள் மாறுவதில்லை. இதனுல் மேடமுதற்புள்ளி ♈ தோற்றப் பாதையில் பின்னேக்கிச் செல்வது புலப்படுகிறது. இதற்குப் **பிற்போக்கு** என்று பெயர். பிற்போக்கை முதன் முதல் கண்டு கூறியவர் கி. மு. இரண்டாம் நூற்றுண்டில் வாழ்ந்த ஹிப்பார்க்கசு (Hipparchus) என்ற கிரேக்க வானியல் அறிஞர் ஆவார்.

சூரியனைச் சுற்றி பூமியானது ஒரு தளத்தில் செல்கிறது. என்றும், இத்தளமே தோற்றப்பாதைத் தளம் என்றும் கூறினேம். இரு

பொருள் இயக்கத்தில் இது மெய்யான கூற்று. ஆனால் பலபொருள் இயக்கத்தில் இது சராசரியாக மெய்யே தவிர, சரியான மெய்க் (exactly true) கூற்று அல்ல. மற்ற கிரகங்களின் ஈர்ப்பு விசையினால் தோற்றப்பாதைத் தளம் அசைகிறது. சந்திரனின் ஈர்ப்புவிசையும் இங்கு முக்கியமானது. இதனால் பூமியின் மையப் புள்ளியானது தோற்றப்பாதைத் தளத்திலிருந்து மேலும் கீழாகச் சிறிது (சுமார் 0·1 செகண்டுகள்) அசைந்து செல்கிறது. எனவே ஒவ்வொரு நேரத் திலும் ஒவ்வொரு தோற்றப் பாதைத்தளம் ஏற்படுகிறது. மேலும் மற்றக் கிரகங்களின் ஈர்ப்புவிசையினால் இத்தளம் ஒரு நூற்றாண்டில் சுமார் 47 செகண்டுகள் சுற்றுகிறது. அதாவது, 1900-ம் வருடம் ஜனவரி 0·5 நாளிலிருந்து T ஜூலியன் நூற்றாண்டுகள் கழிந்த பின்னர் தோற்றப்பாதைத்தளம் ஒரு வருடத்தில் $0{\cdot}4711-0''0007T$ மாறு படுகிறது. இதனால் ஏற்படும் பிற்போக்கினை, கிரகப் பிற்போக்கு (Planetary precession) என்று குறிப்பிடுவோம்.

பூமியின் அச்சு, விண்வெளியில் இயங்குகிறது. பூமியின் வடிவம் முற்றும் கோளவடிவமல்ல என்பதால், சூரியன், சந்திரன் ஆகியவை களின் ஈர்ப்பு விசையினால் பூமியின் நெடுங் கோட்டுத் தளங்களில் சில சுழலினை (couple) கள் ஏற்படுகின்றன. இதனால் பூமியின் அச்சு அசைகிறது. இதன் விளைவாக பூமியின் நடுக் கோட்டுத் தளம் அசைகிறது. நியூட்டன் தான் முதன்முதலாக இந்த உண் மையை இயக்கவியல் முறையில் விவரித்தார். இதன்படி பூமியின் அச்சின் இயக்கம் இரு கூறுகளாகப் பிரிக்கப்படுகிறது. ஒன்றின்படி வருடத்துக்குச் சுமார் 50″ வீதம் தோற்றப் பாதைத் தளத்தின் அச்சைச் சுற்றி பூமியின் சுழலச்சு பின்னோக்கிச் செல்கிறது. இதற்குச் சூரிய சந்திரப் பிற்போக்கு (luni-solar precession) என்று பெயர். சூரிய சந்திர பிற்போக்கு, கிரகப்பிற்போக்கு ஆகிய இரண்டின் கூட்டு விளைவு, பொதுப் பிற்போக்கு (general precession) எனப்படும். மொத்தத்தில் மேடமுதற்புள்ளியானது தோற்றப்பாதைத் தளத்திலும், நடுக்கோட்டுத் தளத்திலும் ஆண்டுக்குச் சுமார் 50″ பின்னோக்கிச் செல்கிறது. மேலும் இவ்விரு தளங்களுக்கிடையே யுள்ள கோணம் ஆண்டுக்கு 0″·47 குறைத்து வருகிறது.

சூரியன் சந்திரன் ஆகியவற்றின் ஈர்ப்புவிசைகளின் மற்றொரு விளைவாக, சுழலச்சு சிறு அசைவுகளுக்குள்ளாகிறது. இதனை அச் சலைவு என்கிறோம். இதனால் மேடமுதற் புள்ளியும், சாய்வுக் கோண மும், சிறு அசைவுகள் பெறுகின்றன.

மேடமுதற்புள்ளியின் பிற்போக்கின் விளைவாக, விண்பொருள் களின் வல ஏற்றம், சரிவுக் கோணம், நெடுங்கோட்டுக் கோணம் ஆகியவை மாறுகின்றன. நியூகோம்பின் ஆராய்ச்சிகளின்படி பொதுப் பிற்போக்கினால் 1900 ஜனவரி மாதம் 0·5 நாளுக்குப்பின்

T நூற்றுண்டுகள் கழித்து நெடுங்கோட்டுக் கோணத்தில் ஏற்படும் மாறுதல் வருடத்திற்கு

$50''{\cdot}2564+0''{\cdot}0222\ T$ ஆகும்.

வல ஏற்றத்தில் ஏற்படும் மாறுதல் வருடத்திற்கு

$46''{\cdot}0850+0''{\cdot}0279\,T$

சாய்வுக்கோணம் $\epsilon=23°27'\cdot08''\cdot26-46''{\cdot}8645T$ தோற்றப் பாதைத் தளம் ஒரு வருட இடைவெளியில் மாறுகிறது அல்லவா? பழைய இடத்திற்கும், புதிய இடத்திற்குமிடையேயுள்ள கோணம் $0''{\cdot}4711-0''{\cdot}0007\ T$ என்று நியுகோம்பு கணக்கிட்டுள்ளார். இவ்விதம் தோற்றப்பாதைத் தளமும், நடுக் கோட்டுத் தளமும் தொடர்ந்து மாறி வருகின்றன. ஆயினும் கொடுத்துள்ள நேரத்தில் தோற்றப் பாதைத் தளத்திற்கும், நடுக் கோட்டுத் தளத்திற்கும் நிலையான இடங்கள் இருக்கும். இவையே அன்றைய சராசரி மேட முதற் புள்ளியையும், நடுக் கோட்டுத் தளத்தையும் (mean equinox and equator of date) நிறுவுகின்றன. இதற்காக 1900 ஜனவரி 0·5 அல்லது 1950 ஜனவரி 0·5 நாள் எடுத்துக் கொள்ளப்படும். இந்த நேரத்திய அச்சுகள் நிலையான அச்சுகள்; அவற்றை இயக்கவியலில் பயன்படுத்தலாம்.

8·7 ஆய்லர் கோணங்கள்

OX, OY, OZ என்பன நிலையான அச்சுகள் என்க. OZ ஐச் சுற்றி ϕ அளவு கோணத்திற்கு மற்ற இரு அச்சுகளையும் சுற்றி OX_1, OY_1, OZ என்ற அச்சுகளைப் பெறுக: பிறகு OY_1 ஐச் சுற்றி θ அளவு கோணத்திற்கு மற்ற இரு அச்சுகளையும் சுற்றி, $OX_2\ OY_1\ OZ'$ என்ற அச்சுகளைப் பெறுக கடைசியாக, OZ' ஐச் சுற்றி Ψ அளவு கோணத் திற்கு மற்ற இரு அச்சுகளையும் சுற்றி, OX', OY', OZ' என்ற புதிய அச்சுகளைப் பெறுக. இவ்விதமாக, OX, OY, OZ அச்சுகளிலிருந்து OX', OY', OZ', என்ற அச்சுகளைப் பெற்றுள்ளோம். இங்கு மேற் கொண்ட θ, ϕ, Ψ ஆய்லர் கோணங்கள் எனப்படும். படத்திலிருந்து ஒவ்வொரு அச்சு மாற்றத்தையும் ஒரு அணியினுல் பின் வருமாறு விளக்கலாம்.

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} X_2 \\ Y_1 \\ Z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\Psi & \sin\Psi & 0 \\ -\sin\Psi & \cos\Psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_1 \\ Z' \end{pmatrix}$$

இம்மூன்று 3×3 அணிகளையும் ,முறையே A, B, C என்று குறித்தால்,

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}, \; D = CBA. \quad \text{இங்கு}$$

$$D = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi\cos\Psi - \sin\theta\sin\Psi & \cos\theta\sin\phi\cos\Psi + \cos\phi\sin\Psi & -\sin\theta\cos\Psi \\ -\cos\theta\cos\phi\sin\Psi - \sin\phi\cos\Psi & \cos\phi\cos\Psi - \cos\theta\sin\phi\sin\Psi & \sin\theta\sin\Psi \\ \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \end{pmatrix}$$

OX, OY, OZ என்பன கொடுத்துள்ள ஒரு நேரத்தில் நடுக்கோட்டு அச்சுகள், OX', OY', OZ' என்பன கொடுத்துள்ள மற்றொரு நேரத்தில் நடுக் கோட்டு அச்சுகள் என்றால், மேலே விவரித்த முறைப்படி, விண்மீன்களின் நடுக் கோட்டுக் கூறுகளை மாற்றிக் கொள்ள வேண்டும். ஏனெனில் வல ஏற்றம், சரிவுக் கோணம் ஆகிய காட்சிகளின் மூலம் அன்றைய அச்சுத் திசைகளைப் பொறுத்தே கிடைக்கிறது. இயக்கவியலில் நிலையான அச்சுகள் தேவை என்பதனால் இவற்றை நிலையான அச்சுகளுக்கு மாற்றுவது அவசியமாகும்.

நியூகோம்பின் ஆராய்ச்சிப்படி, 1900ஆம் ஆண்டு ஜனவரி 0.5 நாளுக்குப் பின்னர் T அயனந்த நூற்றாண்டுகள் கழித்து

$$\theta = 2004''.68\,T - 0''.43T^2$$

$$\phi = 2304''.25\,T + 0''.30T^2$$

$$\Psi = 2304''.25\,T + 1''.09T^2$$

ஆனால் ϕ, Ψ ஆகியவை படத்தில் காட்டியதற்கு எதிர்ப்புறமாக எடுத்துக் கொள்ளப்பட வேண்டும்.

தோற்றப்பாதைக் கூறுகளிலும் இவ்விதமே மாற்றங்கள் செய்யப் படவேண்டும். மாற்றச் சமன்பாடுகளிலுள்ள குணகங்கள் தேசிய பஞ்சாங்கங்களில் கணித்துத் தரப்பட்டுள்ளன.

§ 8·8. அச்சலைவும் நேரக்கணக்கும்

OX, OY, OZ என்பன 1900ஆம் வருடத்திய நிலையான தோற்றப் பாதை அச்சுகள் என்க. OX அந்நேரத்திய மேட முதற்புள்ளி வழியே செல்கிறது. O என்பது பூமியின் மையப்புள்ளி. Ox, Oy, Oz என்பன பூமியுடன் நகர்ந்து செல்லும் நிலையான நடுக்கோட்டு அச்சுகள். Oz தான் பூமியின் சுழலச்சு, Oz வடதுருவத்தின் வழியே செல்கிறது. Ox ஆனது கிரீனிச்சு வழியே செல்கிறது என்க. $\cdot, \phi, \Psi$ என்பன Ox, Oy, Oz-ன் ஆய்லர் கோணங்கள் எனில்,

θ, ϕ, Ψ என்பன பூமிக்குப் பொதுப்படுத்தப்பட்ட கூறுகளாகின்றன. பூமியின் இயக்கச் சக்தி, அதன் மையத்தைப் பொறுத்து.

$$T_1 = \tfrac{1}{2}A(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \tfrac{1}{2}C(\dot{\Psi} + \dot{\phi}\cos\theta)^2$$

இத்துடன் பூமியின் மையப் புள்ளியானது தோற்றப்பாதையில் நகர்வதால் பூமிக்கு அதனாலேற்படும் இயக்கச் சக்தி $T_0 = \frac{1}{2} Mv^2$-ம் இருக்கும். எனவே, பூமியின் மொத்த இயக்கச்சக்தி

$$T = T_1 + T_0 = \tfrac{1}{2}A(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2\theta) + \tfrac{1}{2}C(\dot{\Psi} + \dot{\phi}\cos\theta)^2 + \tfrac{1}{2}Mv^2.$$

இங்கு V-ன் மதிப்பு மாறாதது. மேலும், v-ல் ஆய்லர் கோணங்களோ, அவற்றின் வகைக் கெழுக்களோ கிடையாது. பூமியின்மீது சந்திரன், சூரியன் ஆகியவற்றின் விசைத்தேக்கம்

$$U = \frac{3\,GM\,(C-A)\,z^3}{2\,\rho^5} - \frac{3\,GS\,(C-A)\,z_1^2}{2\rho_1^5}$$

இங்குச் சந்திரனின் கூறுகள் (x, y, z), ρ என்பது பூமிக்கும் சந்திரனுக்குமிடையேயுள்ள தூரம். M என்பது சந்திரனின் திணிவு. Z_1, ρ_1, S என்பன சூரியனைக் குறிக்கும்.

சந்திரனின் கூறுகள் OX, OY, OZ-ஐப் பொறுத்து (ξ, η, ζ) எனில், (8)-லிருந்து

$$Z = \xi \sin\theta\cos\phi + \eta\sin\theta\sin\phi + \zeta\cos\theta.$$

இதில் ξ, η, ζ என்பன θ, ϕ, Ψ-ஐச் சாராதவை. இதிலிருந்து U ஆனது θ, ϕ ஆகியவற்றை மட்டுமே சார்ந்துள்ளது புலப்படும். எனவே, லாகிராஞ்சு சமன்பாட்டில் Ψ-சமன்பாடு தருவது :

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\cdot C\cdot 2\cdot(\dot{\Psi} + \dot{\phi}\cos\theta)\right\} = 0.$$

எனவே $\dot{\Psi} + \dot{\phi}\cos\theta$ = ஒரு மாறிலி எண் $= \omega$

என்க. மற்ற இரு லாகிராஞ்சு சமன்பாடுகளைக் கொண்டு பின்வரும் சமன்பாடுகளைப் பெறலாம் :

$$\theta = \theta_m + \Theta,$$
$$\phi = \phi_m + \Phi,$$

$$\Theta = 9''\!\cdot\!21\cos\Omega - 0''\!\cdot\!09\cos 2\Omega + 0''\!\cdot\!55\cos 2\llcorner + 0''\!\cdot\!09\cos 2☾$$

$$-\Phi = -17''\!\cdot\!23\sin\Omega + 0''\!\cdot\!21\sin 2\Omega - 1''\!\cdot\!27\sin 2\llcorner$$
$$- 0''\!\cdot\!21\sin 2☾ + 0''\!\cdot\!07\sin g_1 + 0''\!\cdot\!13\sin(\llcorner - \pi)$$

இங்கு $\llcorner$, ☾ என்பன முறையே சூரியன், சந்திரன்களின் சராசரி நெடுங்கோட்டுக் கோணம். π என்பது சூரியனின் அண்மைப்புள்ளியின் நெடுங்கோட்டுக்கோணம். g_1 என்பது சந்திரனின் சராசரி

நெறிப்பிறழ்ச்சி. Ω என்பது சந்திரனின் ஏறுகோள் சந்தியின் நெடுங்கோட்டுக் கோணம். இந்த ஏறுகோள் சந்தி, சுமார் 18·613 வருடங்களில் தோற்றப்பாதையில் ஒரு முழுச் சுற்று (பிற்போக்காகச்) சுற்றுகிறது.

இங்கு $90-\phi_m$ என்பது நெடுங்கோட்டுக் கோணத்தில் மொத்தச் சூரிய சந்திரப் பிற்போக்கு. Θ, Φ என்பன முறையே 'சாய்வுக்கோணத்தில் அச்சலைவு' (Nutation in obliquity), 'நெடுங்கோட்டுக் கோணத்தில் அச்சலைவு' (Nutation in longitude) எனப்படும். Θ, Φ ஆகியவற்றின் வடிவங்களிலிருந்து, அவை காலவட்டச் சார்புகளைச் சார்ந்துள்ளன என்பது தெரிய வரும். Φ ல் மிகப் பெரிய வீச்சம் (amplitude) கொண்ட உறுப்பு $17''\cdot23 \sin\Omega$. Θ-ல் மிகப் பெரிய வீச்சம் கொண்ட உறுப்பு $9''\cdot21 \cos\Omega$. இவற்றின் கால வட்ட நேரம் 18·613 வருடங்கள்.

$\theta_m = \theta_0 + 0''\cdot 0607\, T^2$ என்றும் கணக்கிட்டிருக்கிறார்கள். இதனால் 10 நூற்றாண்டுகளில் θ_m-ல் ஏற்படும் மாற்றம் 6 செகண்டுகளே.

இப்போது கிரீனிச்சில் தோற்ற மீன்வழி நேரம் τ என்க. $90+\Psi$ என்பது 1900ஆம் வருடத்திய (நிலையான) மேட முதற்புள்ளியிலிருந்து அளக்கப்பட்ட கிரீனிச் மீன்வழி நேரம். λ என்பது நேரக் கோணத்தில் கிரகப் பிற்போக்கு (planetary precession in hour angle) எனில்,

$$\tau = 90^\circ + \Psi - \lambda$$

$\lambda = 12''\cdot47\, T - 2''\cdot38\, T^2$ என்று கணக்கிட்டிருக்கிறார்கள்.

எனவே
$$\begin{aligned}\dot{\tau} &= \dot{\Psi} - \dot{\lambda}\\ &= \omega - \dot{\phi}\cos\theta - \dot{\lambda}\\ &= \omega - \dot{\lambda} - (\dot{\phi}_m + \dot{\Phi})\cos(\theta_m + \Theta)\\ &= \omega - \dot{\lambda} - \dot{\phi}_m(\cos\theta_m\cos\Theta - \sin\theta_m\sin\Theta)\\ &\qquad - \dot{\Phi}\cos(\theta_m + \Theta)\end{aligned}$$

Θ என்பது மிகச் சிறியது என்று நாமறிவோம். எனவே, $\cos\Theta = 1$. $\sin\Theta = \Theta$ என்றிடுக.

$$\dot{\tau} = \omega - \dot{\lambda} - \dot{\phi}_m\cos\theta_m + \dot{\phi}_m\sin\theta_m\,\Theta - \dot{\Phi}\cos(\theta_m + \Theta)$$

$-\dot{\lambda} - \dot{\phi}_m \cos\theta_m$ என்பது வல ஏற்றத்தில் வருடாந்தரப் பொதுப் பிற்போக்கு (Annual general precession). இதனை m என்று குறிப்பிடுவர்.

$$m = 46''\cdot 0845 + 0''\cdot 000278\,t$$

$-\dot{\phi}_m \sin\theta_m$ என்ற உறுப்பை n என்று குறிப்பிடுகிறார்கள். இதுவே சாய்வுக் கோணத்தில் வருடாந்தரப் பொதுப் பிற்போக்கு.

$$n=20''\cdot 04-8''\cdot 4\times 10^{-5}\, t$$

m, n-ல் வரும் t என்பது ஜூலியன் வருடங்களில் கணக்கிடப்படும். இதனால் n Θ-ன் மதிப்புச் சுமார் $\frac{20\times 20}{60\times 60}\times\frac{22}{7\times 180}\times 9$ செகண்டுகள், அதாவது $0''\cdot 001$-க்கும் குறைவு. இதனை விட்டு விட்டால்,

$$\dot{\tau}=\omega+46''\cdot 0845-0''\cdot 000278\, t-\dot{\Phi}\cos\theta_0$$

என்று எழுதலாம், கடைசி உறுப்பில் $(\theta_m+\Theta)$-க்குப் பதிலாக θ_0 என்று எழுதியதால் ஏற்படும் பிழை மிகச் சிறியது (சுமார் $\cdot 00002$).

இச் சமன்பாட்டை t-ஐப் பொறுத்துத் தொகையிட,

$\tau=\tau_0+\omega t+46''\cdot 0845\, t-0''\cdot 000139 t^2-\Phi\cos\theta_0$ அல்லது, கால அளவையில்

$$\tau=\tau_0+\omega t+3^s\cdot 0723\, t-0^s\cdot 000\,00927\, t^2-\Phi\cos\theta_0.$$

இதிலிருந்து நாமறிவதாவது: கிரீனிச் தோற்ற மீன் வழி நேரம் ஒரு சீரான வேகத்துடன் வளர்கிறது. அத்துடன், அச்சசைவினாலும் இது மாறுகிறது. இம்மாற்றத்தை $-\Phi\cos\theta_0$ என்ற உறுப்பின் மூலம் அறிகிறோம். Φ-ன் மீப் பெருமதிப்புச் சுமார் $17''\cdot 23+1''\cdot 27$ என்பதால் அச்சசைவினால் τ-ல் ஏற்படும் மாற்றத்தின் மீப்பெரு மதிப்புச் சுமார் $1^s\cdot 2$ ஆகும். மேலும், அச்சசைவினால் τ-ல் ஏற்படும் மாற்றம் கால வட்டச் சார்பாகும். கால வட்ட நேரம் சுமார் 19 வருடங்கள்.

அனுபந்தம் 1

சில மாறிலிகளும் மாற்று விகிதங்களும்

1 மைல்	= 1·609 344 கி.மீ.
1 கடற்பகுதி மைல் (Nautical mile)	= 1·852 000 கி. மீ.
1 அடி	= 0·304 800 மீ.
ஒளியின் வேகம்	= 299792·5 கி.மீ./செகண்டு
k	= 0·017202 098 95
1 ஒளி-செகண்டு	= 299 792·5 கி.மீ.
1 வானியல் அலகு	= 499·012 ஒளி-செகண்டு
1 வானியல் அலகு	= (149 598 845 ± 250) கி.மீ.
1 ரேடியன்	= 57°· 295 7795
1°	= 0·0174532925 ரேடியன்
e	= 2·718 2818
π	= 3·14159265

$G = (6{\cdot}668 \pm {\cdot}005) \times 10^{-11}$ நியூட்டன்கள் மீ./கி.கி.^{2}

அனுபந்தம் 2

கிரகங்களைப்பற்றிய சில விவரங்கள்

கிரகம்	சராசரித் தொலைவு (10^7கி.மீ-ல்)	மீன்வழி காலவட்ட நேரம் (அயனுந்த நாள்களில்)	நடுவட்ட ஆரம் (கி.மீ-ல்)	திணிவு (பூமியின் திணிவு=1)
புதன்	5·791	87·97	2420	·05
வெள்ளி	10·821	224·70	6200	·82
பூமி	14·96	365·256	6378	1·00
செவ்வாய்	22·79	686·98	3400	0·11
வியாழன்	77·83	4332·59	71400	318·00
சனி	142·8	10759·2	60400	95·22
யூரேனஸ்	287·2	30687	23800	14·55
நெப்தியூன்	449·8	60184	22300	17·23
புளுட்டோ	591·0	90700	7200 ?	?

சூரியனுக்கும் பூமிக்கும் இடையே சராசரித் தொலைவு

$= 1{\cdot}000000232\ (1 \pm 1{\cdot}3 \times 10^{-9})$ வா. அ.

பூமியின் ஆரம் $= (6378\ 165 \pm 25)$ மீட்டர்கள்.

பூமியின் திணிவு $= (5.977 \pm 0{\cdot}004) \times 10^{24}$ கி.கி.

$$\frac{\text{சூரியனின் திணிவு}}{\text{பூமியின் திணிவு}} = 332949{\cdot}1978$$

சூரியனின் திணிவு $= 1{\cdot}991 \times 10^{30}$ கி.கி.

பூமியிலிருந்து சந்திரனுக்குச் சராசரித் தொலைவு 384405 கி.மீ.

$= 0{\cdot}00257$ வா. அ.

$$\frac{\text{சந்திரனின் திணிவு}}{\text{பூமியின் திணிவு}} = \frac{1}{81{\cdot}33}$$

சந்திரனின் நடுவட்ட ஆரம் $= 1738$ கி.மீ.

மேற்கோள் நூற்பட்டியல்
(BIBLIOGRAPHY)

அத்தியாயங்கள் 1, 6-க்கு

1. Goldstein, H.: *Classical Mechanics*, Addison - Wesley, 1964.
2. McCuskey, S.W.: *Introduction to Advanced Dynamics*, Addison-Wesley, 1959.
3. Synge, J.L., and Griffith, B.A.: *Principles of Mechanics*, McGraw Hill 1959.
4. Whittaker, E.T.: *A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies*, Dover, 1944.

பொது வான இயலுக்கு

1. Krasavtsev, B. and Khlyustin, B: *Nautical Astronomy* Mir, 1970.
2. Russell, H.N., Dugan, R.S. and Stewart, J, Q.: *Astronomy*, Ginn & Co., 1945.

சுற்றுப் பாதைகள் கணிப்பிற்கு

1. Dubyago, A.D.: *The Determination of Orbits*, MacMillan, N.Y., 1961.
2. Herget, P.: *The Computation of Orbits*, University of Cincinatti, 1948.

அத்தியாயம் 4-க்கு

1. Jeffries, H: *The Earth*, Cambridge U.P., 1949.
2. Ramsey, A.S.: *Newtonian Attraction*, Cambridge U.P., 1949.

சந்திய இயக்கக் கொள்கைகளுக்கு

1. Brown, E.W.: *An introductory Treatise on the Lunar Theory*, Cambridge U.P., 1896.
2. Brown, E. W. and Shook C.A.: *Planetary Theory*, Cambridge U.P., 1933.

விண்வெளி இயக்கவியலுக்கு

1. Brouwer, D., and Clemence, G.M.: *Methods of Celestial Mechanics*, Academic Press, N.Y., 1961.

2. Danby, J.M.A.: *Fundamentals of Celestial Mechanics*, MacMillan, N.Y., 1962.

3. Herrick. S., *Astrodynamics*, *Vol. I and II*, Van Nostrand Reinhold Co., 1971.

4. Geyling, F.T. and Westerman, H.R.: *Introduction to Orbital Mechanics*, Addison - Wesley, 1971.

5. McCuskey, S. W.: *Celestial Mechanics*, Addison Wesley, 1963.

6. Moulton, F.R.: *An Introduction to Celestial Mechanics*, MacMillan, N.Y., 1914.

7. Plummer, H.C.: *An Introductory Treatise on Dynamical Astronomy*, Dover, 1960 (Reprint).

8. Smart, W.M.: *Celestial Mechanics*, Longmans, Green & Co., 1953

9. Sterne, T.E.: *An Introduction to Celestial Mechanics*, Interscience, 1960.

கலைச்சொற்கள்

அ

அகற்சிக் கோணம் — Eccentric angle
அசைவற்ற தீர்வு — Unperturbed solution*
அசைவுகள் — Disturbances, Perturbations*
அசைவுதரும் ஆமில்டோனியன் — Perturbing Hamiltonian
அசைவுபெற்ற தீர்வு — Perturbed solution
அச்சலைவு — Nutation
அடிகோள்கள் — Postulates
அடிப்படை விண்மீன் — Primary star
அட்டவணை முறை — Numerical method
அண்மைத் தூரம் — Pericentric distance
அண்மைநிலை ஆண்டு — Anomalistic year
அண்மைப்புள்ளி — Perihelion, Pericentre*
அண்மைப்புள்ளியின் வீச்சு — Arguement of the perihelion
அதியியல் சமன்பாடு — Transcendental equation
அயனாந்த வருடம் — Tropical year*
அன்றைய நடுக்கோடு, மேட முதற்புள்ளி ஆகியவற்றின் நிலைகள் — Mean equator and equinox of date*

ஆ

ஆமில்டன்-ஜாகோபி சமன்பாடு — Hamilton - Jacobi equation
ஆய்லர் சூத்திரம் — Euler's Formula
ஆரைவேகம் — Radial velocity

இ

இசைக்கோடு — Polar line
இடஞ்சுழி — Anti-clockwise
இடமாறு தோற்றம் — Parallax
இயக்கச் சக்தி — Kinetic energy
இயக்கநிலைப் பண்பு — Kinetic potential
இயக்கமுறை வானவியல் — Dynamical astronomy

இயக்கவியல் கருத்துகள் — Dynamical principles
இயல்புத் தொகுப்பு — Natural system
இயல்பு நெறிப்பிறழ்ச்சி — True anomoly
இரட்டைச் சார்பு — Even function
இரட்டை மீன் — Binary
இரண்டாம்படி வகைக்கெழுச் சமன்பாடு — Second order differential equation
இருபொருள் இயக்கம் — Two body problem

உ

உச்சிவட்டம் — Meridian
உந்தத் திருப்பம் — Moment of momentum
உயர்நிலை வான இயல் — Advanced astronomy
உள்விசைகள் — Internal forces
உள்ளூர் நேரம் — Local time
உள்ளூர் மீன்வழிச் சராசரி நேரம் — Local mean siderial time

எ

எதிர்மாற்றம் — Inverse transformation
எரிமீன் — Meteors

ஏ

ஏறுகோள் சந்தி — Ascending node

ஐ

ஐன்ஸ்டீன் சாரியக்கக் கொள்கை — Einstein's Theory of Relativity

ஒ

ஒருசீர் ஏறும் சார்பு — Monotonic increasing function
ஒருபொருள் இயக்கம் — One body problem
ஒருமை மாற்றம் — Identity transformation
ஒற்றை — Odd
ஒற்றைச் சார்பு — Odd function

ஓ

ஓடு — Shell

க

கடல்நிலை ஏற்ற இறக்கம் — Tides*
கடற்பகுதி வான இயல் — Nautical astronomy

கட்டிறுக்கப் பொருள்	—	Rigid bodies
கவியங்கள்	—	Apses
காப்புநிலை விசை	—	Conservative force
காலச் சமன்பாடு	—	Equation of time
கால வட்ட நேரம்	—	Periodic time
காற்பகுதி	—	Quadrant
கிரகங்களை ஆராய்தல்	—	Planetary theory
கிரகத்தின்நெடுக்கோட்டு கோணம்	—	Longitude of the orbit
கிரகப் பிற்போக்கு	—	Planetary precession
கிளெயிராவின் சமன்பாடு	—	Clairaut's equation
குத்துப் பிரிவுகள்	—	Components
குத்து வீழ்ச்சி	—	Orthogonal projection
குறுக்குக் கோட்டுக் கோண வீச்சம்	—	Arguement of the latitude
குறுக்குக் கோணம்	—	Latitude
குறுக்கு வேகம்	—	Transverse velocity
கெப்ளரின் சமன்பாடு	—	Kepler's equation
கொஞ்சு பாதை	—	Osculating orbit
கொஞ்சு மூலகங்கள்	—	Osculating elements
கோணப்பகுதி	—	Sector
கோணப்பகுதியின் பரப்பளவு	—	Area of the sector
கோணவேற்றம்	—	Altitude
கோணம்	—	Longitude of the orbit
கோள வான இயல்	—	Spherical astronomy
கோள் ஒளிப் பிறழ்ச்சி	—	Planetary aberration
கோள் மையக் கூறுகள்	—	Planeto centric co-ordinates

ச

சக்தித் தொகை, சக்தித் தொகையீடு	—	Integral of energy
சந்திர அட்டவணைகள்	—	Lunar tables
சந்திர இயக்கக் கொள்கைகள்	—	Lunar theories
சமதள வளைவு	—	Plane curve
சமபக்க முக்கோணத் தீர்வு	—	Equilateral triangle solution
சராசரி இயக்கம்	—	Mean motion
சராசரிச் சூரியன்	—	Mean sun
சராசரி ஞாயிற்று நாள்	—	Mean solar day
சராசரித் தொலைவு	—	Mean distance
சராசரி நெடுங்கோட்டுக் கோணம்	—	Mean longitude
சராசரி நெறிப்பிறழ்ச்சி	—	Mean anomoly

சராசரி மீன்வழி நேரம் — Mean siderial time
சரிவுக் கோணம் — Declination
சர்வதேச நீள்வளையக் கோளம் — International ellipsoid
சனி — Saturn
சாசுவத ஈர்ப்பு விதி — Universal Law of Gravitation*
சாதாரண வகைக்கெழுச் சமன்பாடு — Ordinary, differential equation
சாய்வுக்கோணம் — Obliquity
சாய்வு கோணத்தில் அச்சலைவு — Nutation in obliquity
சார்பு — Function
சிறுவில் — Small arc
சிற்றச்சுக் கோள உரு — Oblate spheroid
சுழலிணை — Couple
சுழல் உந்தம் — Angular momentum
சுழல் பரப்பு — Solid of revolution
சுழல் வேகம் — Angular velocity
சுற்றுப் பாதைகள் — Orbits in space
சூரிய சந்திரப் பிற்போக்கு — Lunar solar precession
செய்முறை வான இயல் — Practical astronomy

த

தப்பிச் செல்லும் வேகம் — Escape velocity
தலைகீழ் வர்க்க விதி — Inverse Square Law
தளவளைவுப் பாதை — Plane curve
தள்ளுவிசை — Repulsive force
தன்விழைப் படி — Degree of freedom*
தாக்களவு — Impulse
தாக்குவிசை — Impulsive force
திங்கள் மையக் கூறுகள் — Seleno-centric co-ordinates
திசைக் கொசைன்கள் — Direction cosines
திசை வில் — Azimuth
திசை வேகம் — Velocity
திசைவேக வளர்ச்சி வீதம் — Acceleration
திட்டம் — Standard
திணிவு — Mass
திணிவுகளில் இரண்டாம் படிப் பொது அளவு — General perturbation of the second order in masses
திணிவு மையம் — Centre of mass
துணைக் கோள்களின் இயக்கத்தை ஆராய்தல் — Satellite theory

துணைவட்டம் — Auxiliary circle
துணை விண்மீன் — Companion
துருவங்கள் — Poles
தேராக் குணகங்கள் — Undetermined coefficients
தொகுதி — Group
தொகுதி அமைப்பு — Group structure
தொகை — Integral
தொடக்கக் கட்டம் — Epoch*
தொடக்க நிபந்தனைகள் — Initial conditions
தொடர்ச்சியுள்ள — Continuous
தொடர்பு பண்பு — Associative law
தொடர் மாற்றி முறை — Reversion of series method
தொடர் முறை — Series method
தொடுகை மாற்றங்கள் — Contact transformations*
தொலைநோக்கிக் கூட வானஇயல் — Observatory astronomy
தோற்ற இணை விண்மீன்கள் — Visual binaries
தோற்ற ஞாயிற்று நாள் — Apparent solar day
தோற்றப்பாதை — Apparent orbit, ecliptic
தோற்றப் பாதைக் கூறுகள் — Ecliptic co-ordinates
தோற்றப்பாதைத் தளம் — Plane of the ecliptic
தோற்றப்பாதையின் சரிவு — Obliquity of the ecliptic
தோற்ற மீன்வழி நேரம் — Apparent siderial time

ந

நகரும் தடைகள் — Moving constraints
நடுக்கோடு — Equator
நடுக்கோட்டின் ஆரம் — Equatorial radius
நடுக்கோட்டுக் கூறுகள் — Equatorial co-ordinates
நடுக்கோட்டுத் தளம் — Plane of the equator
நாழிகைக் கோல் — Sun dial
நியமனச் சமன்பாடு — Canonical equation
நியமன மாறிலிகள் — Canonical constants
நிலை — Configuration
நிலைச்சக்தி, நிலைப்பண்புச் சக்தி — Potential energy
நிலைத்திருக்கும் (வடிவில்) — Covariant
நிலைமச் சுழல்திறன் — Moment of inertia
நிலைமப் பெருக்கம் — Product of inertia
நிலைமம் — Inertia
நிலையான — Finite

நிறை நுண்ணெண்	—	Perfect differential
நீள்கால அசைவு	—	Secular perturbation
நீள்காலப் போக்குடையன	—	Secular
நீள்வளையம்	—	Ellipse
நீள்வளையப் பாதையில் விரிவுகள்	—	Expansions in an elliptic orbit
நுணுக்கமான	—	Accurate
நுண் தொடுகை மாற்றங்கள்	—	Infinitesimal contact transformations
நெடுங் கோட்டுக் கோணம்	—	Longitude of the ascending node
நெடுங் கோட்டுக் கோணத்தில் அச்சலைவு	—	Nutation in longitude
நெடுங் கோட்டுக் கோணம்	—	Longitude of the perihelion
நெட்டச்சு	—	Major axis
நேரக் கோணம்	—	Hour angle
நேர்கோட்டு உந்தம்	—	Linear momentum
நேர்கோட்டுத் தீர்வு	—	Straight line solution
நேர்த் தூர விதி	—	Law of direct distance
நேர்மாறுகிறது	—	Directly varies

ப

பஞ்சாங்க நேரம்	—	Ephemeries Time (E.T.)
பரப்பளவுத் தொகையீடுகள்	—	Integral of area
பரிதிமையக் கூறுகள்	—	Heliocentric co-ordinates
பரிமாணம்	—	Size
பருமம்	—	Volume
பல பொருள் இயக்கம்	—	N-body problem
பாதையின் போக்கு	—	Orientation
பாப்பு உருவம்	—	Pfaff's expression
பாயிசான் அடைப்புகள்	—	Poisson brackets
பார்வையிடம்	—	Place of observation
பிரவுன் முறை	—	Brown's method
பிற்போக்கு	—	Precession, retrograde motion
பிறழ்ச்சி	—	Aberration
புவிமீது குறுக்குக் கோட்டுக் கோணம்	—	Geographic latituda
புவிமேற்பகுதி வான இயல்	—	Geodetic astronomy
புவிமையக் கூறுகள்	—	Geocentic co-ordinates

பொது அசைவுகள் — General perturbations
பொது நேரம் — Universal Time (U.T.)
பொதுப்படுத்தப்பட்ட கூறுகள் — Generalised co-ordinates*
பொதுப்படுத்திய விசை — Generalised force*
பொதுப் பிற்போக்கு — General precession

ம

மகல்லா சூத்திரம் — Maccullagh Formula
மட்டப்படுத்து எண் — Flattening
மாருது — Invariant
மாறிகளைப் பிரித்தல் முறை — Method of separation of variables
மீன்வழி நாள் — Siderial day
மீன்வழி நேரம் — Siderial time
மீன்வழி மணி — Siderial hour
முக்கிய நிலைம அச்சுகள் — Principal axes of inertia at O.
முக்கிய நிலைமச் சுழல் திறன்கள் — Principal moment of inertia
முதலச்சு — Initial line
முதற்படித் தோராயப் பாதை — Preliminary orbit
முப்பட்டை — Prism
முழுமைத் தொகுப்பு — Holonomous system
முழுக்கள் — Integers
மூலகங்களில் மாற்றங்கள் — Variation of elements
முற்போக்கு — Direct motion
மூல்டன் முறை — Moultan's method
மூன்று கூறுகள் — Co-ordinates
மெய்ப் பாதை — True orbit
மேட முதற்புள்ளி — First point of aries
மேற்படி — Higher order
மையச் சமன்பாடு — Equation of centre
மையவகற்சி — Ellipticity
மையவகற்சி நெறிப்பிறழ்ச்சி — Eccentric anomoly
மைய விசை — Central force
மொத்த சக்தி — Total energy
மொத்தம் — Resultant

ரே

ரேடியோ வான இயல் — Radio astronomy

ல

லாகிராஞ்சியன் — Legrangian
லாகிராஞ்சு அடைப்பு — Legrangian brackets
லாகிராஞ்சு கிரக இயக்கச் சமன்பாடு — Legrange's planetary equation
லாம்பர்ட்டுத் தேற்றம் — Lambert's theorem
லஜாந்திரே சார்புகள் — Legendre functions
லஜாந்திரேயின் முதற்பிரிவு துணைச்சார்பு — Associated Legendre function of the first kind

வ

வடிவில் நிலைத்துள்ள — Covariant*
வல ஏற்றம் — Right ascension
வளரும் சார்பு — Secular term
வால் மீன் — Comet
வான இயல்பியல் — Astrophysics
வான இயல் அலகு — Astronomical unit
வான ஊர்தி வான இயல் — Aviation astronomy*
வானக் குறுங்கோட்டு அளவு — Celestial latitude
வான் கோளம் — Celestial sphere
வான் நெடுங்கோடு அளவு — Celestial longitude
விசை — Force
விசைத் தேக்கம் — Potential, Force potential*
விசைத் தேக்கச் சார்பு — Potential function
விசையின் விதி — Law of force
விசை வெளி — Field of force
விண்பொருள் தொடக்கவியல் — Cosmogony*
விண்வெளி இயக்கவியல் — Celestial mechanics
விரிவுபடுத்திய புள்ளிமாற்றம் — Extended point transformation
வீச்சம் — Amplitude
வெளிப்படையாக நேரத்தைச் சார்ந்துள்ளவை — Explicit functions of time
வெளிவிசைகள் — External forces

* புதிதாக உருவாக்கப்பட்ட கலைச்சொற்கள்